

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Явления самовоздействия пучков волн,
содержащих ударные фронты

О.В. Руденко, О.А. Сапожников

Описаны результаты экспериментальных и теоретических исследований явлений самовоздействия интенсивных пучков волн, имеющих пилообразную во времени форму. Обсуждаются инерционные процессы само- и дефокусировки в средах с квадратичной нелинейностью, связанные с формированием акустических течений и нагреванием среды за счет нелинейного поглощения энергии на ударных фронтах в профиле пилообразной волны. Рассмотрены эффекты саморефракции ударно-волновых импульсов, приводящие, в частности, к насыщению максимальных значений поля при фокусировке. Для сред с кубической нелинейностью, где пилообразная волна содержит ударные фронты как сжатия, так и разрежения, выяснены условия протекания самофокусировки в условиях ее сильной конкуренции с нелинейным затуханием волн. Описаны новые математические модели, их свойства симметрии, точные решения и результаты численного моделирования. Дана общая характеристика современного состояния исследований в этой области.

PACS numbers: 43.25.+y, 47.40.Nm, 87.54.Hk

Содержание

1. Введение (973).
 2. Самовоздействие пучков пилообразных ультразвуковых волн за счет нагревания среды и формирования акустического ветра (975).
 3. Саморефракция слабых ударных волн в квадратично-нелинейной среде (978).
 4. Безынерционное самовоздействие в среде с кубической нелинейностью (981).
 5. Симметрии и законы сохранения для параболического уравнения, описывающего распространение пучков в нелинейной среде (985).
 6. Заключение (987).
- Список литературы (988).

1. Введение

Термин *самовоздействие* используется в волновой физике, главным образом, для характеристики нелинейных явлений, при которых мощная волна, не меняя своей формы, приобретает амплитудно-зависимые коэффициент поглощения или скорость распространения. В первом случае говорят о нелинейном поглощении (или усилении) волны, а во втором — о нелинейной дисперсии. Отметим, что именно постоянство или медленное изме-

нение формы позволяет рассматривать волну как цельное образование со своей скоростью распространения. Заметный интерес к эффектам самовоздействия впервые возник с открытием самофокусировки света. История вопроса детально изложена в работах [1, 2]. В нелинейной оптике устойчивыми объектами являются квазигармонические волны. Их устойчивость возникает благодаря сильной дисперсии, препятствующей возникновению волн других частот, т.е. искажению формы исходной волны. Самовоздействие волн связано с откликом среды на основной частоте; этот отклик возникает благодаря кубической нелинейности среды и нечетным нелинейностям более высоких порядков. Отметим, однако, что при рассмотрении связанных волн разных частот самовоздействие может возникнуть и в квадратично-нелинейной среде [3].

Теория самофокусировки света содержит ряд основополагающих результатов не только для физики мощного лазерного излучения, но и для общей теории нелинейных волн [4]. Идеи первых теоретических работ в этой области (см. [5–7]) оказали заметное влияние на постановку и развитие аналогичных исследований в ряде других разделов физики, в частности в нелинейной акустике и теории нелинейных волновых пучков иной физической природы, распространяющихся в средах со слабой дисперсией.

Обратим внимание на широкое распространение в работах последних лет термина "самофокусировка", имеющего совершенно иной смысл (см., например, [8–12]). Оно связано с появлением адаптивных источников звука и ультразвука, использующих обращение сигнала во времени для его фокусировки в неоднородную среду. Новое использование уже "занятого" термина может привести к недоразумениям.

О.В. Руденко, О.А. Сапожников. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет
119992 Москва, Воробьевы горы, Российская Федерация
Тел./Факс (095) 939-29-36; (095) 939-29-52
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru; oleg@acs366.phys.msu.ru

Статья поступила 18 марта 2004 г.,
после доработки 25 апреля 2004 г.

Гармонические волны являются не единственным примером устойчивых образований, распространяющихся в нелинейной среде. Более того, при отсутствии или малости дисперсии исходно гармонические волны конечной амплитуды теряют стабильность, их профиль по мере распространения искажается, а спектр довольно быстро расширяется за счет образования высших гармоник исходной частоты. В средах с некоторыми видами нелинейности и дисперсии устойчивыми сигналами могут стать, например, солитоны. Если дисперсия слаба, то появляется новая возможность образования устойчивых сигналов с широким частотным спектром. Дисперсия считается "слабой", если характерный масштаб дефазировки взаимодействующих волн разных частот (длина когерентности) намного превышает длину нелинейного взаимодействия. В противном случае говорят о "сильной" дисперсии. Известно, что при распространении интенсивных волн в среде со слабой дисперсией происходит их искажение, накапливающееся с увеличением пройденного расстояния. Оно приводит к исчезновению мелких деталей и формированию профилей универсальной формы [13]. Так, одиночное возмущение, локализованное во времени, в результате совместного действия квадратичной нелинейности, поглощения и дифракции принимает форму N-волны. Такие волны, например, образуются при взрывах [14], подобную же форму имеет волна звукового удара от сверхзвуковых самолетов [15]. Периодическая плоская волна приобретает форму "пилы", представляющей собой последовательность прямолинейных участков одинакового наклона, соединенных ударными фронтами. На рисунке 1

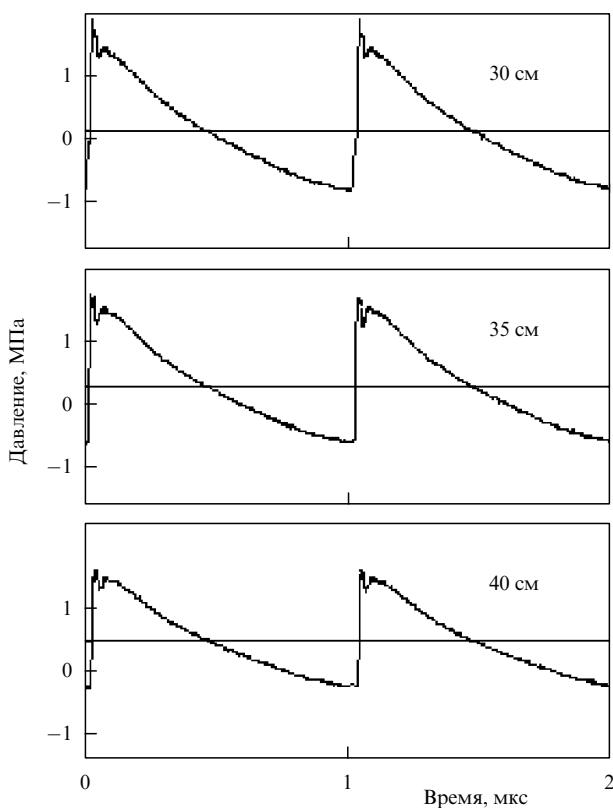


Рис. 1. Форма интенсивной ультразвуковой волны, излучаемой пьезоэлектрическим источником на частоте 1 МГц, измеренная на выходе из ближней зоны на различных расстояниях.

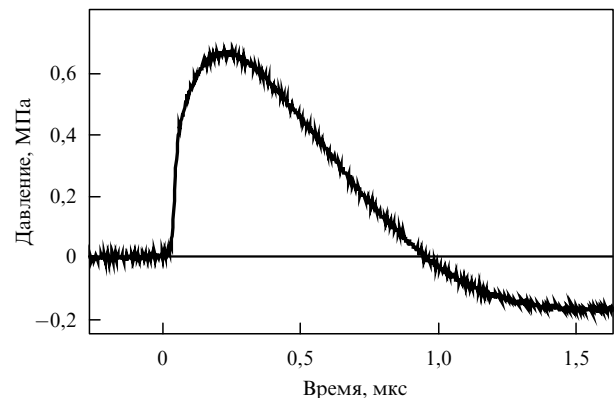


Рис. 2. Форма акустического импульса с ударным фронтом при распространении в релаксирующей жидкости.

приведен пример экспериментально измеренной формы подобной пилообразной волны, зарегистрированной на выходе из ближней зоны круглого пьезоэлектрического излучателя ультразвука [16]. Исходная гармоническая ультразвуковая волна по мере распространения претерпела сильные искажения, пока не стала пилообразной. Измерения на последовательных расстояниях показывают, что профиль практически не зависит от расстояния, изменяется лишь амплитуда волны. Впервые пилообразные акустические волны в жидкости наблюдались еще в 1950-х годах и были объяснены влиянием квадратичной нелинейности среды [17]. В средах с более сложными свойствами могут формироваться асимптотически универсальные профили иных типов. Например, в среде с релаксацией форма волны за ударным фронтом уже не является прямолинейной и определяется параметрами релаксационного процесса. На рисунке 2 показан профиль мощного акустического импульса, прошедшего слой релаксирующей жидкости (уксусной кислоты) [18]. В отличие от формы волны на рис. 1, здесь за ударным участком следует плавный подъем; указанная структура фронта определяется параметрами релаксационного процесса. Благодаря конкуренции нелинейных и диссипативных процессов профили упомянутых волн оказываются квазистабильными. При распространении таких волновых структур их форма сохраняется, изменяются лишь параметры — пиковые значения возмущений, а для импульсов — еще и длительность.

Как уже отмечалось, аналогичным свойством квазистабильности обладает квазигармоническая волна в диспергирующей среде. Именно поэтому для описания ее самовоздействия можно перейти от полевых уравнений, содержащих пространственные переменные и время, к более простым моделям типа нелинейного уравнения Шрёдингера для параметра (комплексной амплитуды), зависящего лишь от пространственных координат. Иногда таким образом (путем исключения времени) удается упростить и нелинейные уравнения, описывающие поведение пучков волновых профилей, содержащих ударные фронты.

Настоящая работа посвящена проблемам пространственного самовоздействия волн с широким частотным спектром, временные профили которых содержат разрывы или крутые ударные фронты конечной ширины, малой по сравнению с периодом волны или с характерной длительностью импульсного сигнала.

2. Самовоздействие пучков пилообразных ультразвуковых волн за счет нагрева среды и формирования акустического ветра

На возможность теплового самовоздействия акустических пучков по аналогии с лазерными пучками указано в работе [19]. В средах с растущей при нагревании скоростью звука c (пример — вода при комнатных температурах, для которой $\delta = (\partial c / \partial T)_p / c > 0$) происходит дефокусировка, а в средах с отрицательным температурным коэффициентом $\delta < 0$ (большинство жидкостей) пучок самофокусируется. Обзор первых теоретических работ дан в [20]. Позднее удалось наблюдать этот эффект [21, 22]. Библиография последующих публикаций имеется в обзорах [23, 24] и в книге [25]. Однако она не может считаться исчерпывающей, поскольку исследования самовоздействий гармонических волн в акустике продолжают до сих пор [26]. Тепловое самовоздействие квазигармонических акустических волн привлекает внимание исследователей, прежде всего, возможностью переноса на акустику многих интересных результатов, полученных в нелинейной оптике [27].

Тепловое самовоздействие обусловлено изменением средней температуры среды из-за поглощения энергии волны, т.е. соответствующий нелинейный механизм является нелокальным (размер тепловой неоднородности намного превышает длину волны) и медленным (тепловая линза развивается за время, значительно превышающее период волны). Другой механизм подобного инерционного самовоздействия обусловлен формированием в среде гидродинамических потоков ("акустического ветра") под действием радиационного давления мощной ультразвуковой волны [20]. Этот механизм приводит к дефокусировке, так как из-за сноса потоком скорость волны увеличивается с приближением к оси пучка (в той области, где интенсивность ультразвука выше, ветер сильнее).

Следует заметить, что указанные выше явления инерционного самовоздействия достаточно просты и не имеют явно выраженной нелинейной специфики. Поскольку и нагревание среды, и формирование акустических потоков происходят на временах порядка десятков секунд или даже минут, описанные самовоздействия аналогичны явлениям модуляции акустических свойств среды внешними источниками тепла и заданными течениями, позволяющим управлять пучками с помощью тепловых и конвективных линз. По-видимому, эти процессы неоднократно наблюдались в 50-е годы, когда были созданы пьезопреобразователи для возбуждения мощного ультразвука в жидкостях [28] (В.А. Буров и Л.К. Зарембо, частные сообщения), однако они не были интерпретированы как нелинейные эффекты. Структура термодинамических потоков может усложниться под влиянием гравитационной термоконвекции, возникающей из-за нагрева среды волной. Например, оригинальная конфигурация в виде "рюмки" — два аксиально-симметричных тороидальных вихря, вращающихся в противоположных направлениях — наблюдалась в глицерине при вертикальной ориентации пучка [29]. Внутренний вихрь был обусловлен акустическим течением, внешний — термоконвекцией (рис. 3). В области, где вихри почти гасят друг друга и результирующая ско-

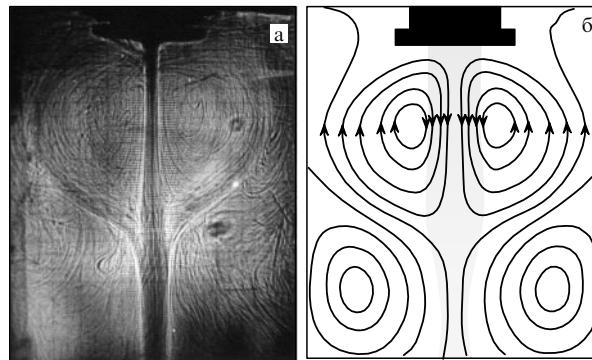


Рис. 3. (а) Теневая картина неоднородностей, порожденных вертикальным ультразвуковым пучком частоты 1 МГц в глицерине. Подсветка осуществлялась излучением импульсного лазера. Излучатель ультразвука расположен сверху. Темные области соответствуют нагретым участкам. Периодические часто расположенные горизонтальные линии в центре соответствуют неоднородностям, вызванным ультразвуковой волной. (б) Наблюдаемая структура термодинамических потоков, соответствующая приведенной слева теневой картине. Черным цветом сверху показан излучатель, серым изображена область акустического пучка.

рость потока мала, происходило увеличение интенсивности звука на порядок и сужение пучка в 2–3 раза.

В работе [30] выведена упрощенная система уравнений, описывающая тепловые самовоздействия в условиях, отвечающих эксперименту [29], т.е. с учетом акустического и термоконвекционного потоков. Уравнения для аксиально-симметричной задачи имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c} \left(\frac{U_x}{c} + \delta T \right) \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_x}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \Delta_{\perp} U_x + F - \beta g T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (r U_x) + \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta_{\perp} T + \frac{c}{c_p} F. \quad (4)$$

Здесь x, r — цилиндрические координаты, ось x совпадает с осью пучка, $\tau = t - x/c$ — "запаздывающее время" в системе, движущейся вместе с волной со скоростью звука c , p — акустическое давление, $\mathbf{U} = (U_x, U_r)$ — скорость гидродинамического потока, T — температура среды, Δ_{\perp} — лапласиан по радиальной координате, ε и b — нелинейный и диссипативный параметры [31], η — сдвиговая вязкость, β — термический коэффициент объемного расширения, c_p, κ — теплоемкость и теплопроводность среды, g — ускорение силы тяжести. Уравнение (1) описывает пучок с учетом акустической нелинейности, диссипативных эффектов и дифракции; в отличие от известного уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова [32], оно учитывает также модуляцию скорости распространения волны изменениями температуры T и продольной составляющей U_x скорости течения. Поглощение волны приводит к генерации потоков несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями (2) и (3), а также к изменению температурного поля, динамика которого описывается уравнением (4). Давление P_0 в

квазиэкартовском течении [31] зависит от x , t и не зависит от r . Радиационная сила в правых частях (2) и (4) дается формулой

$$F = \frac{b}{c^5 \rho^3} \left\langle \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle, \quad (5)$$

где угловые скобки означают усреднение по быстрым акустическим осцилляциям (по времени τ).

Система связанных нелинейных уравнений (1)–(4) позволяет описать самовоздействие как гармонических, так и сильно искаженных волн с широким частотным спектром. В тех случаях, когда акустическая нелинейность несущественна (формально $\varepsilon = 0$), в уравнении (1) можно исключить "быстрое время", положив

$$p = A(x, r) \exp(-i\omega\tau). \quad (6)$$

При этом для комплексной амплитуды A получается следующее параболическое уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + ik \left(\frac{U_x}{c} + \delta T \right) A + \frac{b\omega^2}{2c^3 \rho} A = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A. \quad (7)$$

Оставшиеся уравнения (2)–(4) связаны с уравнением (7) посредством "силы" (5), которая теперь имеет вид

$$F = \frac{b\omega^2}{c^5 \rho^3} A^2. \quad (8)$$

В тех случаях, когда нужно учитывать акустическую нелинейность, "быстрое время" удается исключить лишь в приближении нелинейной геометрической акустики. Полагая в уравнении (1)

$$p = p \left(x, r, \theta = \tau - \frac{\psi(x, r)}{c} \right), \quad (9)$$

в пределе коротких длин волн (малых по сравнению с тепловыми и гидродинамическими неоднородностями) получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} p \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{b}{2c^3 \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{U_x}{c} + \delta T = 0. \quad (11)$$

Структура уравнения переноса (10) напоминает уравнение Бюргера, используемое для плоских нелинейных волн [31], и отличается от него двумя последними слагаемыми, учитывающими изменение сечения лучевых трубок. Уравнение (11) — это уравнение эйконала, характеризующее искривление лучей из-за неоднородности температурного и гидродинамического полей.

Уравнение (10) описывает формирование и последующее распространение пилообразной волны с конечной шириной ударного фронта, каждый период которой дается формулой [31]

$$p(x, r, \theta) = A(x, r) \left[-\frac{\omega\theta}{\pi} + \tanh \left(\frac{\varepsilon}{b} A(x, r)\theta \right) \right], \quad (12)$$

$$-\frac{\pi}{\omega} \leq \theta < \frac{\pi}{\omega}.$$

Выражение (12) можно рассматривать как обобщение формулы (6) для акустически нелинейной задачи. Здесь неизвестная функция A — "пиковое" давление в "пиле" является аналогом амплитуды гармонической волны в формуле (6).

Подставив (12) в уравнения (10) и (5), приведем их к следующему виду:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\varepsilon\omega}{\pi c^3 \rho} A^2 + \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{A}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (13)$$

$$F = \frac{2}{3\pi} \frac{\varepsilon\omega}{c^5 \rho^3} A^3. \quad (14)$$

Член $\sim \varepsilon A^2$ в уравнении (13) описывает нелинейное поглощение, которое усиливается с увеличением A . "Сила" (14), в отличие от (8), определяется не диссипативными свойствами среды b , а только нелинейностью ε . Поэтому самовоздействия пилообразных волн должны происходить и в идеальных средах, где обычное поглощение отсутствует. Заметим также, что согласно формуле (14) имеем $F \sim A^3$, а не $F \sim A^2$, как в формуле (8) для гармонических волн. Это означает, что как радиационная сила, так и мощность тепловыделения в среде под действием акустического пучка существенно увеличиваются при переходе от режима гармонических волн к нелинейному режиму с пилообразным профилем волны [33]. Оба этих эффекта наблюдались экспериментально [34–36].

Уравнение (13) удается решить для параболической формы волнового фронта, полагая

$$\psi(x, r, t) = \varphi(x, t) + \frac{r^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, t). \quad (15)$$

Точное решение нелинейного уравнения (13) с учетом (15) имеет вид

$$A = \frac{p_0}{f} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \frac{1}{x_s} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \int_0^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Здесь p_0 — исходная амплитуда на оси пучка, функция Φ описывает исходное поперечное распределение: $A(x=0, r) = p_0 \Phi(r/a_0)$, a_0 — начальный радиус пучка. Характерная нелинейная длина

$$x_s = \frac{\pi c^3 \rho}{\varepsilon \omega p_0} \quad (17)$$

есть расстояние образования разрыва, определяющее масштаб нелинейного поглощения волны [31]. Когда акустическая нелинейность слабая и расстояние x_s велико, интегральным членом в квадратных скобках решения (16) можно пренебречь; при этом функция f описывает одновременно изменение ширины пучка и пикового давления на оси. Когда нелинейность существенна, происходит изменение формы пучка; нелинейное затухание выражено сильнее вблизи оси, где пиковое давление больше, поэтому выпуклый пучок сглаживается, становясь в поперечном сечении более однородным.

Уравнение эйконала (11) с учетом (15) примет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f \left(\frac{U_2}{c} + \delta T_2 \right), \quad (18)$$

где $T_2(x, t)$ и $U_2(x, t)$ — коэффициенты в разложении температуры и скорости течения в ряд по поперечной координате:

$$T = T_0 - \frac{r^2}{2} T_2 + \dots, \quad U = U_0 - \frac{r^2}{2} U_2 + \dots$$

Если поля температуры и скорости известны, из уравнения (18) можно определить функцию f и тем самым решить задачу — рассчитать пространственное распределение пикового давления (16) пилообразной волны в любой момент времени.

В дальнейшем будем считать, что самовоздействие происходит в неподвижной среде. Явления, связанные с возникновением потоков в поле пилообразных волн и учетом гидродинамической конвективной нелинейности, обсуждались в работе [37].

Первый эксперимент по наблюдению тепловой самофокусировки за счет нелинейного поглощения ультразвуковой волны описан в [38]. Пучок пилообразных волн мощностью 20 Вт, шириной 30 мм на частоте 2 МГц пропускался через ацетон — слабодиссипативную жидкость с отрицательным температурным коэффициентом скорости звука $\delta = -4,6 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1}$. В результате интенсивность волны на оси заметно возрастала. В течение 20–30 с устанавливалось стационарное значение, превосходящее начальное в 1,5 раза.

Значительно позднее появилась серия работ, посвященных экспериментам и компьютерному моделированию эффектов самовоздействия пилообразных волн в биотканях (см., например, [39, 40]). Эти работы стимулированы конкретными проблемами ультразвуковой терапии (гипертермия) и хирургии с помощью сфокусированных пучков большой интенсивности. Оказалось, в частности, что тепловое самовоздействие приводит к сдвигу фокальной области, который следует учитывать для прицельного воздействия мощного ультразвука на обрабатываемую область ткани [36].

Для описания этого явления рассмотрим стационарный режим, полагая производную по времени в уравнении теплопроводности (4) равной нулю. При этом из (4) получается

$$T_2 = \frac{\rho c}{2\kappa} F = \frac{\varepsilon \omega p_0^3}{3\pi \kappa c^4 \rho^2 f^3} \left[1 + \frac{1}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f(x')} \right]^{-3}. \quad (19)$$

Исключая из (19) и (18) переменную T_2 , получим уравнение для f [41]:

$$\left[1 + \Pi \int_0^z \frac{dz'}{f(z')} \right]^3 f^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = \pm \Pi^3. \quad (20)$$

Здесь Π — безразмерная амплитуда волны на входе в среду:

$$\Pi = \frac{x_0}{x_s} = \frac{\pi |\delta| c^2}{3\kappa \varepsilon \omega} p_0, \quad x_0 = \frac{\pi^2 \delta c^5 \rho}{3\kappa \varepsilon^2 \omega^2},$$

$z = x/x_0$ — безразмерная продольная координата. Знак "плюс" в правой части уравнения (20) соответствует положительным значениям температурного коэффициента δ , при которых происходит дефокусировка; знак "минус" отвечает свойствам самофокусирующей среды. Для нахождения функции $f(z)$ следует решить уравнение

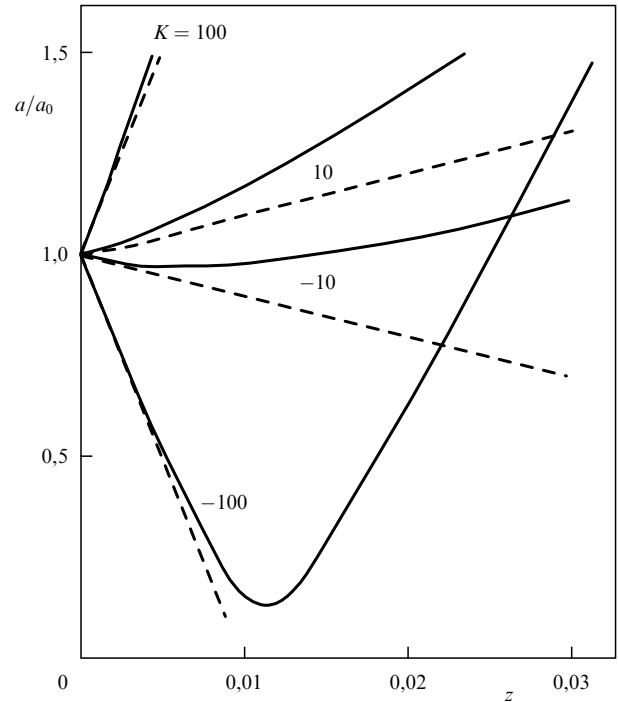


Рис. 4. Зависимость поперечного радиуса пучка пилообразных волн в условиях проявления тепловой самодефокусировки. Числа у кривых указывают безразмерную кривизну волнового фронта на входе в среду (K). Штриховые линии построены для случая отсутствия теплового самовоздействия.

(20) с граничными условиями

$$f(z=0) = 1, \quad f'(z=0) = K,$$

где $K = x_0/R$ — безразмерная кривизна волнового фронта на входе в среду.

При значениях параметров $\Pi = 1$, $K = -1$ нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (20) имеет точное решение $f = \exp(-z)$. В этом специальном случае, как видно из (16), $A(r=0, z) = p_0$, т.е. исходный сфокусированный пучок в результате самодефокусировки и нелинейного поглощения сохраняет постоянным пиковое давление на оси. При других значениях параметров нужно интегрировать уравнение (20) численно [41].

На рисунке 4 изображены зависимости от расстояния радиуса пучка $a(z)$, определенного по уровню пикового давления $1/e$ от его значения на оси, нормированного на свое исходное значение a_0 . Сплошные кривые соответствуют дефокусирующей среде ($\Pi = 10$), штриховые прямые — среде без самовоздействия. Тепловая дефокусировка приводит к наблюдавшимся [39, 40] явлениям: формированию перетяжки конечных размеров и ее удалению от точки линейного фокуса. Например, нижняя кривая на рис. 4 ($K = -100$) может соответствовать следующим значениям параметров: частоте 4 МГц, исходному радиусу пучка 3 см, радиусу кривизны фронта $-9,4$ см, пиковому давлению 1,3 атм. В таком эксперименте (вода, мягкая биоткань) перетяжка сдвинется относительно фокуса примерно на 1,4 см, а ее радиус составит 3,6 мм, что на порядок больше радиуса дифракционной перетяжки.

На рисунке 5а аналогичные зависимости радиуса пучка $a(z)/a_0$ приведены для случая самофокусирующей

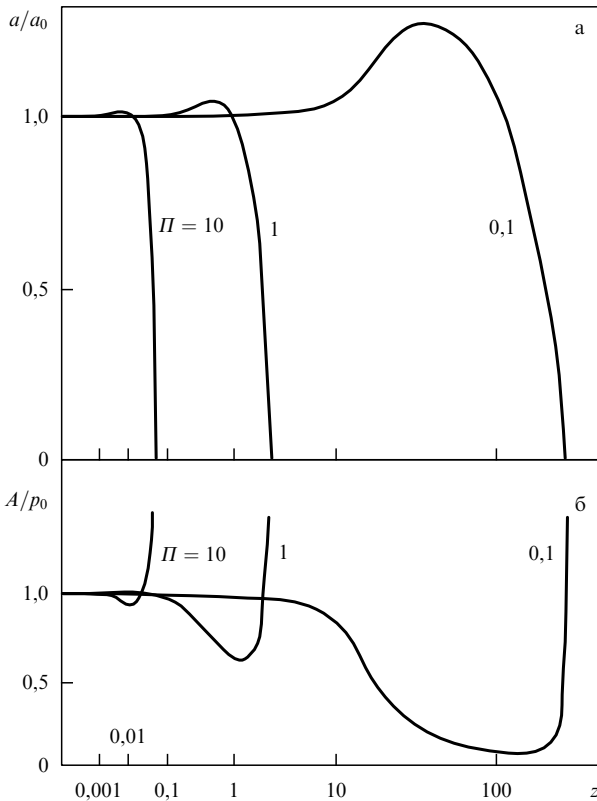


Рис. 5. (а) Зависимость поперечного радиуса пучка пилообразных волн от расстояния при самофокусировке. Числа у кривых указывают безразмерную амплитуду волны на входе в среду Π . (б) Соответствующая зависимость амплитуды волны, нормированной на свое исходное значение.

среды при различных значениях безразмерной амплитуды $\Pi = 0,1; 1; 10$. Исходный фронт волны был плоским. На рисунке 5б изображены зависимости от расстояния нормированной амплитуды $A(z)/p_0$ на оси пучка. При малом значении $\Pi = 0,1$ по мере распространения волны радиус пучка растет, т.е. отчетливо выражено явление нелинейного уширения пучка. Этот эффект объясняется сглаживанием поперечной формы пучка из-за большего поглощения вблизи оси (изотропизация характеристики направленности). Амплитуда на небольших расстояниях уменьшается из-за нелинейного затухания, несмотря на самофокусировку фронта волны. Вблизи нелинейного фокуса $z = z_f$ наблюдаются обратные зависимости: ширина пучка обращается в нуль при неограниченном росте амплитуды. При этом описание является уже некорректным, так как оно не учитывает дифракционную расходимость. Расстояние z_f , на котором происходит самофокусировка, быстро уменьшается с увеличением амплитуды Π .

Рассмотрим теперь процесс нестационарного самовоздействия, когда теплопроводность несущественна и диффузионным членом в уравнении (4) можно пренебречь. При этом

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{c_p} F = \frac{2\varepsilon\omega}{3\pi c^4 \rho^2 c_p} A^3. \quad (21)$$

Определим из (21) T_2 путем разложения в ряд по поперечной координате. Подставив найденное выражение в уравнение (18), придем к следующему уравнению

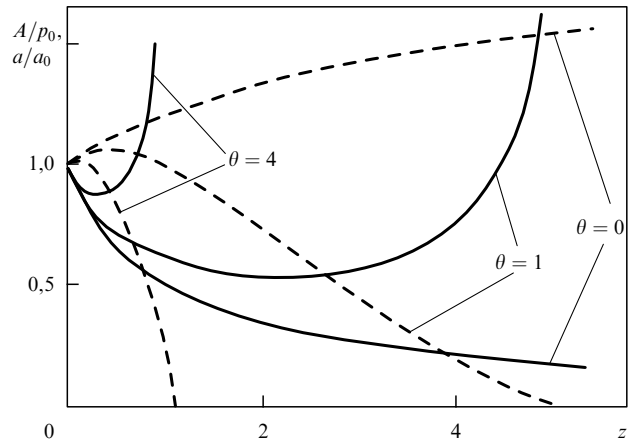


Рис. 6. Зависимость поперечного радиуса пучка a/a_0 (штриховые кривые) и амплитуды волны на оси A/p_0 (сплошные кривые) от расстояния при нестационарной самофокусировке. Кривые соответствуют трем последовательным моментам времени $\theta = 0, 1, 4$.

для функции $f(x, t)$ [41]:

$$f^5 \left[1 + \int_0^z \frac{dz'}{f(z', \theta)} \right]^4 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \pm 1. \quad (22)$$

Здесь использованы новые безразмерные обозначения

$$z = \frac{x}{x_s}, \quad \theta = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{\varepsilon\omega\rho c_p a_0^2}{4\pi|\delta|c^2 p_0}. \quad (23)$$

Как и ранее (см. (20)), знак "плюс" в правой части уравнения (22) отвечает положительным δ (дефокусировка); знак "минус" соответствует самофокусировке. Граничные и начальные условия для постановки задачи надо выбрать так:

$$f(z = 0) = f(\theta = 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z = 0) = \frac{K}{\Pi} = \frac{x_s}{R}. \quad (24)$$

Задача (22), (24) решалась численно. На рисунке 6 приведены рассчитанные зависимости характеристик пучка от расстояния в последовательные моменты времени θ . Первоначально фронт был выбран плоским, среда считалась самофокусирующей. Штриховыми линиями показано поведение поперечного радиуса пучка, сплошными линиями — соответствующее поведение амплитуды волны на оси. Видно, что в начальный момент времени ширина пучка увеличивается с ростом z , а пиковое давление на оси уменьшается вследствие нелинейного поглощения. С течением времени среда прогревается, в результате чего тепловая линза усиливается. Пучок фокусируется, и фокус движется к излучателю. Скорость этого движения уменьшается со временем. Амплитуда волны так же, как в стационарном случае, по мере распространения сначала уменьшается из-за нелинейного поглощения, затем, при приближении к точке нелинейного фокуса, начинает быстро увеличиваться.

3. Саморефракция слабых ударных волн в квадратично-нелинейной среде

Еще в работе [31] было показано, что в квадратично-нелинейной среде без дисперсии в условиях малости

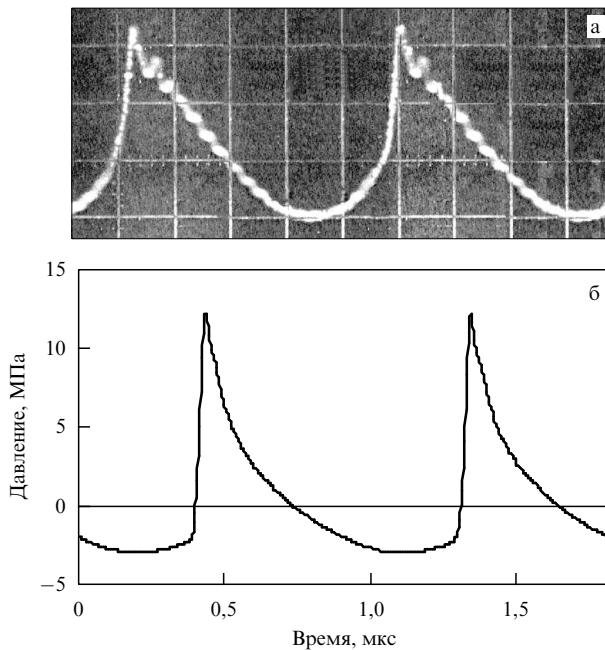


Рис. 7. Асимметричное искажение профиля исходно гармонической волны за счет совместного действия нелинейности и дифракции: (а) профиль нелинейной волны в дальней зоне ультразвукового пучка, излучаемого нефокусированным источником [43]; (б) профиль волны в фокальной точке мощного фокусированного излучателя [35]. В обоих случаях частота источника равна 1 МГц.

дифракции поперечное распределение интенсивности, средней по периоду волны, не изменяется. Вместе с тем происходит генерация гармоник, пространственная локализация которых различна: чем выше номер гармоники, тем в более узкой приосевой области она сосредоточена. Если пучок достаточно широк и дифракция несущественна для волны основной частоты, она тем более мала для высших гармоник; следовательно, квадратичная нелинейность не может искривлять лучи и приводить к самофокусировке. Самовоздействие пилообразной волны в этих условиях сводится к амплитудно-зависимому поглощению, в результате которого пучок в приосевой области поглощается сильнее, чем на краях, и происходит выравнивание (изотропизация) поперечной структуры пучка.

В условиях проявления заметной дифракции волна приобретает частотно-зависимый фазовый сдвиг. В нелинейной волне это приводит к появлению соответствующих фазовых сдвигов между гармониками. В результате сложения расфазированных гармоник вместо обычной "пилы" образуется профиль более сложной формы [42]: в пределах каждого периода область сжатия становится высокой и острой, а область разрежения — сглаженной. Положительный пик давления может даже превысить исходную величину. На рисунке 7 изображены сигналы, наблюдаемые в экспериментах с мощными пучками; показаны два периода исходно-гармонической волны на некотором удалении от ультразвукового излучателя [43, 35]. Рисунок 7а представляет фотографию осциллограммы нелинейного акустического сигнала в дальней зоне нефокусированного источника. На рисунке 7б приведен профиль волны в фокальной области фокусированного источника. Подтверждаются предсказания теории об особенностях искажения профиля.

Такая асимметричная форма волны типична для мощных пучков, излучаемых пьезоэлектрическими излучателями мегагерцевого диапазона в задачах медицинской диагностики и терапии [43–45].

Превышение положительного пикового давления над отрицательным приводит к некоторому ускорению движения ударного фронта. Например, при фокусировке пучка вогнутый ударный фронт по мере приближения к фокусу выпрямляется из-за сверхзвукового распространения вблизи оси; тем самым происходит самодефокусировка и пиковое давление в фокальной области ограничивается. Нелинейное поглощение, вызванное диссипацией энергии волн на ударных участках, также играет важную роль в уменьшении фокальной интенсивности, особенно на участках перед фокусом, где эффекты дифракции не очень существенны (см. также ниже обсуждение саморефракции импульсов). Однако нелинейное поглощение само по себе не в состоянии запретить образование каустик и достижение бесконечно больших интенсивностей при фокусировке пилообразной волны.

В работе [46] рассматривается возможность автолокализованного распространения звуковых пучков (по аналогии с явлением, описанным в оптике [5]), для которых дифракционная расходимость компенсируется нелинейной неинерционной рефракцией. Такая локализация, по-видимому, может быть реализована на некотором ограниченном участке распространения волн при соответствующем выборе волновых профилей специальной формы.

Выше обсуждался эффект саморефракции для периодических пилообразных волн. Гораздо сильнее он выражен в случае одиночных импульсов. Самовоздействия одиночных импульсных сигналов, содержащих ударные фронты [47], представляют интерес для ряда приложений нелинейной акустики и механики. Нелинейные импульсы возбуждаются взрывными источниками [14], электрическими разрядами [48], лазерным излучением [49, 50]. В последние годы исследования мощных импульсов были стимулированы медицинскими приложениями — для ударно-волновой экстракорпоральной литотрипсии (бесконтактного неинвазивного разрушения почечных камней) [50, 51, 36] и дистанционной ультразвуковой эластометрии сдвиговых модулей упругости мягких биотканей [52].

При создании литотриптеров проводились измерения параметров возбуждаемых ими фокусированных импульсов. Типичная форма акустического импульса в фокусе электрогидравлического литотриптера показана на рис. 8. Отметим, что пиковое давление в типичных случаях составляет несколько десятков мегапаскалей, а характерная длительность импульса — несколько микросекунд. При исследовании акустических полей литотриптеров были обнаружены такие нелинейные явления, как саморефракция, насыщение пикового давления в фокусе, увеличение размеров фокальной области, ее сдвиг от генератора и ряд других [49–51]. Для понимания природы этих явлений и их математического описания потребовались дополнительные исследования.

Явление саморефракции [47] происходит из-за нелинейного изменения скорости Δc распространения ударного фронта. Это обстоятельство иллюстрирует рис. 9, на котором приведены осциллограммы сигнала широкополосного гидрофона на различных расстояниях при распространении в воде короткого мощного акустиче-

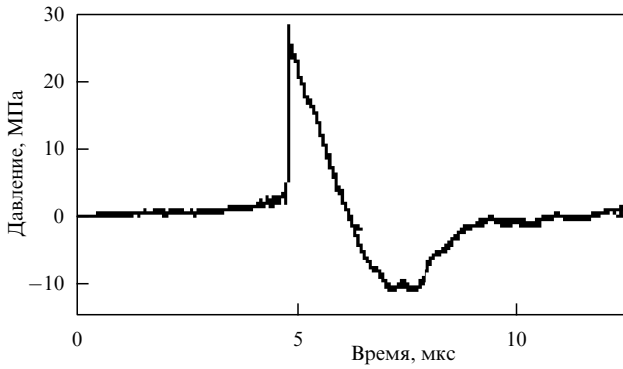


Рис. 8. Форма акустической волны, измеренная мембранным гидрофоном в фокусе электрогидравлического литотриптера. Пик положительного давления обычно предшествует более растянутому хвосту отрицательного давления. Для полного разрушения почечного камня обычно требуется около 2000 импульсов, посылаемых с частотой повторения 1–2 Гц.

ского импульса, созданного оптоакустическим источником [53]. Сигнал имеет устойчиво треугольную форму с ударным фронтом. По мере увеличения расстояния пиковое давление уменьшается, а длительность увеличивается. Начало временной шкалы на последовательных осциллограммах выбрано с учетом задержки, рассчитанной на основе известной скорости малых акустических возмущений в среде (скорости звука). При таком выборе начальной задержки сигналы малой амплитуды на разных расстояниях находятся в одной и той же части осциллограммы. Видно, что, в отличие от слабых сигналов, ударный фронт на осциллограмме сдвигается влево, т.е. распространяется быстрее, чем волны бесконечно малой амплитуды.

Для импульсов, распространяющихся по невозмущенной среде, нелинейная добавка к скорости ударного фронта Δc растет с величиной A скачка давления как $\Delta c = \varepsilon A / 2c\rho$. Поскольку величина A вблизи оси больше, чем на периферии пучка, наблюдается выпрямление фронта сфокусированной волны. Саморефракция часто сопровождается образованием изломов ударного фронта (так называемых shock-shocks [4]), при этом структура ударного фронта напоминает структуру фронта при "маховском" отражении ударной волны от твердой поверхности [54, 55]. Одновременно с саморефракцией происходит процесс нелинейного затухания, и распределение A по фронту становится более однородным; это замедляет саморефракцию и приводит к тому, что в приосевой области около фокуса волна имеет почти плоский волновой фронт. Нетрудно видеть, что описанные процессы должны сдвинуть нелинейный

фокус относительно геометрического фокуса и увеличить размер перетяжки. Эти явления наблюдались в экспериментах, описанных в обзоре [13].

Нелинейное поведение одиночного сфокусированного импульса описано в работе [56] на основе стандартного уравнения Хохлова–Заболотской ($U_x = T = b = 0$ в уравнении (1)). Заменяя переменные (9) и перейдя к приближению нелинейной геометрической акустики, получим пару уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} \left(p - \frac{A}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = - \frac{\varepsilon}{2c^2 \rho} A \quad (26)$$

в той области, где волна содержит ударный фронт с пиковым давлением A . Аналогичная система, в которой $A = 0$, описывает импульс на стадии до образования ударного фронта.

Считая фронт параболическим (15) и совершая замену переменных

$$P = f(x)p, \quad B = f(x)A, \quad \zeta = \frac{r}{af}, \quad \xi = \int_0^x \frac{dx'}{f(x')}, \quad (27)$$

сведем уравнение переноса к уравнению типа простых волн

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon}{c^3 \rho} \left(P - \frac{B}{2} \right) \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad (28)$$

которое легко решается. Результат для пикового давления в одиночном импульсе, имеющем исходную форму во времени в виде равнобедренного треугольника длительностью $2T_0$, запишется как

$$A(x, r) = \frac{p_0}{f} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \frac{1}{2x_s} \Phi \left(\frac{r}{af} \right) \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-1/2}. \quad (29)$$

Здесь $x_1 = R[1 - \exp(-x_s/R)]$ — расстояние, на котором в сфокусированной волне образуется разрыв, $x_s = c^3 \rho T_0 / \varepsilon p_0$ — расстояние образования разрыва в соответствующей плоской волне. Подставив результат (29) в уравнение эйконала (26), приведем его к следующему виду [57]:

$$f^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2x_s x_d} \left[1 + \frac{1}{4x_s} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right] \times \left[1 + \frac{1}{2x_s} \int_{x_1}^x \frac{dx'}{f(x', t)} \right]^{-3/2}. \quad (30)$$

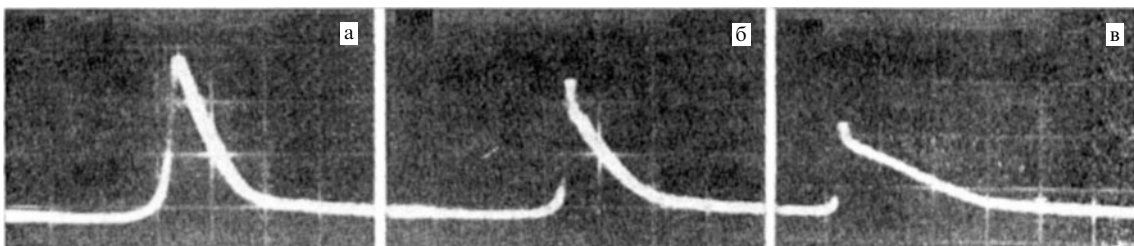


Рис. 9. Профиль мощного акустического импульса, распространяющегося в воде, на различных расстояниях от оптоакустического излучателя: $x = 0$ (а), 4 (б) и 8 см (в). Вертикальная шкала 4 МПа дел.⁻¹, горизонтальная шкала 200 нс дел.⁻¹.

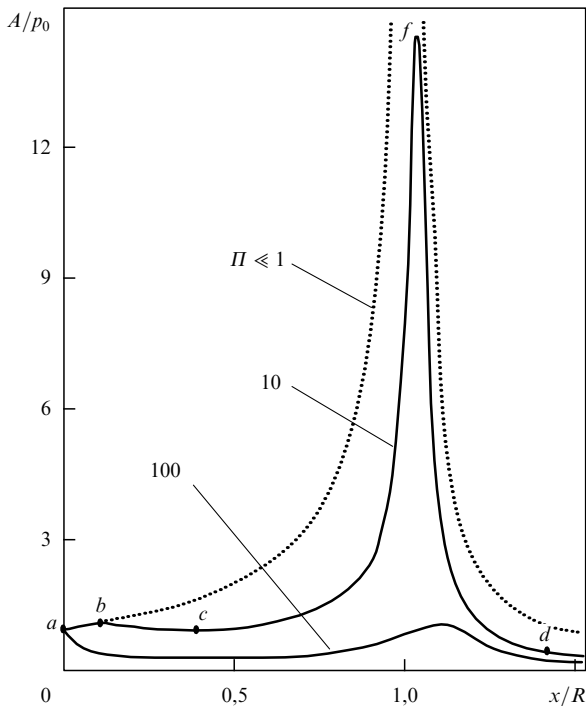


Рис. 10. Пиковое давление акустического импульса на оси пучка A , нормированное на свое исходное значение p_0 , в зависимости от безразмерного расстояния x/R при $D = 0,01$. Сплошными кривыми изображены зависимости для безразмерной амплитуды импульса $\Pi = 10$ и 100 , пунктирная линия соответствует линейной теории ($\Pi \ll 1$).

Здесь $x_d = a^2/2cT_0$ — характерный масштаб дифракции. Граничными условиями при $x = x_1$ будут соотношения

$$f = 1 - \frac{x_1}{R}, \quad \frac{df}{dx} = -\frac{1}{R}. \quad (31)$$

Решение задачи (30), (31) зависит от двух безразмерных параметров, в качестве которых можно выбрать $\Pi = R/x_s$ (безразмерное пиковое давление) и $D = R/x_d$ (безразмерный радиус дифракционной перетяжки).

В работе [56] уравнение (30) с условиями (31) решалось численно. Типичная нелинейная кривая зависимости давления от расстояния содержит четыре характерных участка (рис. 10). Вначале пиковое давление растет из-за схождения волны к фокусу (участок ab). Затем, после образования разрыва, начинается нелинейное затухание и, несмотря на фокусировку, пиковое давление может даже уменьшиться (участок bc). По мере приближения к фокусу (участок cf) давление растет и в некоторой точке $x > R$ достигает максимума. Наконец, на четвертом участке, за фокусом (участок fd) импульс ослабляется как из-за геометрической расходимости, так и вследствие нелинейного поглощения.

Важной особенностью является уменьшение максимального пикового давления A_{\max} с ростом p_0 . При малых значениях Π максимум пикового давления достигается в фокусе $x = R$ и составляет большую величину, равную p_0/D [57]. При достаточно больших исходных значениях (например, при $\Pi \geq 100$ для $D = 0,01$, см. рис. 10) усиления нет совсем. Нужно отметить, что нелинейное уменьшение амплитуды импульса происходит и в отсутствие саморефракции, поскольку волна испытывает нелинейное поглощение из-за диссипации

энергии на ударном фронте. Однако этот механизм в случае импульсов (в отличие от периодических пилообразных сигналов) не способен ограничить уровень пикового давления на некотором расстоянии от источника. Например, при одномерном распространении пиковое давление в акустическом импульсе на заданном расстоянии увеличивается как квадратный корень из исходного пикового давления: $A_{\max} \sim \sqrt{p_0}$ [31]. Саморефракция (самодефокусировка) дополнительно уменьшает максимально достижимое пиковое давление. Для выявления роли этого эффекта проводилось подробное численное исследование задачи (29)–(31). Величина нелинейного "коэффициента усиления" A_{\max}/p_0 с хорошей точностью оказалась обратно пропорциональной произведению ΠD в широкой области изменения параметров Π и D . Это обстоятельство позволило сделать важный вывод об отсутствии зависимости максимально достижимого пикового давления A_{\max} от исходной амплитуды волны p_0 .

Таким образом, рефракция приводит к новому явлению "нелинейного насыщения" — ограничению пикового давления в сфокусированных импульсных сигналах. Согласно расчетам [56]

$$A_{\max} \sim 1,5p_*\alpha^2, \quad (32)$$

где $p_* = \rho c^2/2\epsilon$ — характерное внутреннее давление жидкости, $\alpha = a_0/R$ — тангенс полуугла схождения исходного фокусированного пучка. Как видно из эмпирической формулы (32), уровень максимально достижимого давления в фокусе примерно равен произведению характерного внутреннего давления в среде на квадрат полуугла схождения исходного пучка. Для воды ($p_* = 320$ МПа) при схождении 30° оценка (32) дает $A_{\max} = 130$ МПа, что соответствует экспериментальным данным [51].

Итак, нелинейность сильно влияет на процесс фокусировки импульсных сигналов. Помимо поглощения на ударном фронте происходит самодефокусировка, обусловленная зависимостью скорости фронта от пикового давления. Из-за этого размер фокального пятна может заметно превосходить свое линейное значение, причем он увеличивается с ростом исходной "амплитуды". Продольный размер фокального пятна также увеличивается, т.е. нелинейные эффекты в целом размывают эту область. Кроме того, поперечное распределение "амплитуды" становится более однородным; нелинейный фокус образуется на больших расстояниях, чем линейный. "Амплитуда" импульса в фокусе при больших значениях p_0 от p_0 практически не зависит — наступает нелинейное насыщение.

4. Безынерционное самовоздействие в среде с кубической нелинейностью

В общем случае нелинейный отклик среды происходит с некоторой задержкой. Примером является описанное выше тепловое самовоздействие, при котором нелинейный отклик обусловлен инерционным процессом нагрева среды. Имеется и обратная ситуация, когда нелинейный отклик происходит почти мгновенно, т.е. за время, много меньшее периода волны или длительности импульса. В задачах нелинейной оптики все главные эффекты безынерционного самовоздействия связаны с кубической

нелинейностью среды, проявляющейся на фоне сильной дисперсии. Поэтому естествен интерес к роли кубической нелинейности и в условиях малости дисперсии. Можно показать, что распространение недиспергирующих волновых пучков в средах с кубической нелинейностью описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p^2 \frac{\partial p}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} \right] = \frac{c}{2} \Delta_{\perp} p, \quad (33)$$

где коэффициенты β и γ характеризуют диссипативные и нелинейные свойства среды, как и в уравнении (1), функция $p(x, y, z, \tau = t - x/c)$ описывает профиль волны, x — координата вдоль направления распространения пучка, y, z — координаты в поперечном сечении пучка [58–60].

Например, в акустике кубическая нелинейность является основной для сдвиговых волн в бездефектном твердом теле, при этом в уравнении (33) в качестве p выступает сдвиговое напряжение или колебательная скорость частиц среды. Наряду с классическими твердыми телами, сдвиговые волны могут существовать в гелеподобных материалах, в частности в резинах и мягких биологических тканях. В таких средах сдвиговый модуль мал по сравнению с модулем всестороннего сжатия и, как следствие, легко достигаются большие сдвиговые деформации, т.е. появляются условия для возникновения заметной нелинейности упругого отклика. Несмотря на то что затухание сдвиговых волн в биологической ткани обычно велико, нелинейные эффекты могут заметно проявиться до того, как волна поглотится. Сдвиговые волны в биологической ткани представляют большой интерес в связи с возможностью их использования для диагностики опухолевых образований. В больных тканях модуль сдвига, как правило, заметно увеличен (это известно давно и лежит в основе традиционной диагностики методом пальпации). Одним из эффективных способов возбуждения сдвиговых волн в толще биологической ткани является использование радиационной силы, возникающей при поглощении в среде пучков продольных ультразвуковых волн [61, 52]. Эффективность такого источника сдвиговых напряжений может быть повышена за счет применения фокусированного ультразвука с пилообразным волновым профилем, радиационное давление которого на среду повышается вследствие эффекта нелинейного поглощения [35]. Другой способ объемной генерации сдвиговых волн большой амплитуды связан с использованием источника, движущегося с "околозвуковой" скоростью, т.е. со скоростью возбуждаемых им сдвиговых волн. Теория такого рода возбуждения нелинейных волн рассматривалась в работах [62, 63]. При движении со "сверхзвуковой" скоростью эффективное возбуждение происходит вдоль соответствующего конуса Маха. Скорость сдвиговых волн в биологических тканях относительно мала, около нескольких метров в секунду, поэтому околозвуковой или сверхзвуковой источник может быть создан путем сканирования в пространстве возбуждающего ультразвукового пучка. Эта возможность была недавно продемонстрирована в экспериментах, описанных в докладе [64].

Безынерционное самовоздействие на основе модели (33) исследовано в работах [58, 60, 65–68]. Обычный для диспергирующих сред переход (6) от полевого описания (33) к уравнению типа Шрёдингера для комплексной

амплитуды

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \beta \omega^2 A = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A + i\gamma \omega |A|^2 A \quad (34)$$

($k = \omega/c$) здесь неправилен по следующим причинам.

С одной стороны, как показано в работе [7], уравнение (34) при $\beta = 0$ описывает неустойчивость плоского фронта волны в тех случаях, когда ее интенсивность превышает критическое значение:

$$A^2 > A_{cr}^2 = \frac{c}{\gamma \omega^2} \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 a_2^2}. \quad (35)$$

При этом амплитуда любой пространственной гармоники возмущения $A'(x) \cos(y/a_1) \cos(z/a_2)$ (здесь y, z — координаты в поперечном сечении пучка) растет по экспоненте как функция расстояния. Таким образом, в самофокусирующей среде плоская волна при условии (35) неустойчива; она разбивается на отдельные самофокусирующиеся пучки, несущие мощность порядка критической.

С другой стороны, уравнение (34) выписано в предположении о гармоническом характере профиля волны. Однако исходная плоская гармоническая волна, описываемая уравнением (33), из-за отсутствия дисперсии по мере распространения искажается и трансформируется в сигнал с пилообразным профилем [69, 58]. В отличие от квадратично-нелинейных сред [31], "зубцы пилы" в среде с кубической нелинейностью имеют трапециевидальную форму (рис. 11). В результате нелинейного поглощения на ударных фронтах "амплитуда" возмущения уменьшается по закону

$$A(x) = A_0(1 + \alpha \gamma \omega A_0^2 x)^{-1/2},$$

где $\alpha = (3 - 2 \ln 2)/4\pi = 0,1284 \dots$

Таким образом, нелинейный член $\gamma p^2 \partial p / \partial \tau$ в уравнении (33) ответствен за два противоположных процесса: рост амплитуды вследствие самофокусировки и нелинейное затухание из-за формирования ударных фронтов. Ясно, что пользоваться уравнением (34) для недисперги-

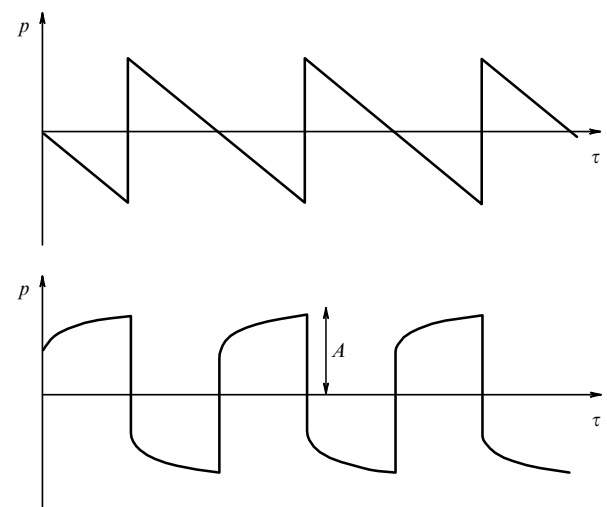


Рис. 11. Форма пилообразной волны в среде с кубической нелинейностью (снизу) отличается от формы волны в случае квадратичной нелинейности (сверху).

рующих волн нельзя, поскольку сильным конкурентом нелинейной дисперсии в этом случае является нелинейное затухание. Важность нелинейного затухания можно проиллюстрировать, рассматривая поведение плоской пилообразной волны. Нелинейная дисперсия при этом проявляется в амплитудно-зависимом увеличении скорости распространения пилообразной волны. Можно показать, что по мере распространения соответствующий временной сдвиг профиля волны $\Delta\tau$ увеличивается с расстоянием по логарифмическому закону [58]:

$$\omega\Delta\tau = \frac{1}{4\alpha} \ln(1 + \alpha\gamma\omega A_0^2 x).$$

Как видно, на больших расстояниях нелинейная дисперсия проявляется все слабее и слабее, поскольку одновременно уменьшается и амплитуда волны из-за нелинейного поглощения. Поскольку закон спада амплитуды известен (см. выше), то амплитуду волны можно связать с соответствующим нелинейным фазовым сдвигом:

$$A(x) = A_0 \exp(-2\alpha\omega\Delta\tau).$$

На расстоянии, где нелинейная добавка к фазе равна 2π (набег в одну длину волны), амплитуда заметно уменьшится: $A \approx 0,2A_0$, а при набеге в три длины волны пилообразное возмущение уже практически затухнет: $A \approx 0,008A_0$. И хотя в волновом пучке дифракция может изменить характер самовоздействия, сделанные оценки нелинейного затухания говорят о том, что при описании самофокусировки нужно развить адекватные подходы, учитывающие специфику поведения пилообразных волн, в частности их заметное затухание.

Используя (9) и переходя к приближению нелинейной геометрической акустики, получаем вместо (33) пару уравнений: переноса

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma(p^2 - \langle p^2 \rangle) \frac{\partial p}{\partial \theta} - \beta \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \nabla_{\perp} \psi \nabla_{\perp} p + \frac{p}{2} \Delta_{\perp} \psi = 0 \quad (36)$$

и эйконала

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \psi)^2 = \gamma c \langle p^2 \rangle. \quad (37)$$

Умножим теперь (36) на p и усредним по периоду. В результате имеем уравнение для средней интенсивности

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \nabla_{\perp} \psi \nabla_{\perp} I + I \Delta_{\perp} \psi = -2\beta \left\langle \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 \right\rangle, \quad I = \langle p^2 \rangle. \quad (38)$$

Правая часть уравнения (38) связана с нелинейной диссипацией энергии на ударных фронтах. Она вычисляется на основе выражений, описывающих структуру фронтов. В периодической трапецеидальной "пиле" ударная волна сжатия имеет вид перепада между значениями $-A$ и $A/2$, а волна разрежения — между A и $-A/2$ [69]. Участок сжатия на периоде с номером n описывается неявным выражением

$$\ln \left| \frac{1 + 2p/A}{1 - p/A} \right| + \frac{3}{1 - p/A} = \frac{9\gamma}{2\beta} A^2 (\theta - \theta_n). \quad (39)$$

Аналогичная формула справедлива для отрицательных полупериодов пилообразной волны (участков разреже-

ния). Рассчитав правую часть (38) на основе (39), в пределе исчезающе малой линейной диссипации придем к следующей системе уравнений [58]:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} (IV) + \frac{m}{r} IV = -\alpha\omega\gamma I^2, \quad (40)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} = \gamma c \frac{\partial I}{\partial r}. \quad (41)$$

Здесь $m = 0$ для плоского (шеллевого) пучка, $m = 1$ для осесимметричного круглого пучка, $V = \partial\psi/\partial r$ — угол наклона соответствующего акустического луча к оси пучка. Упомянутый выше коэффициент $\alpha \approx 0,13$ определяется структурой профиля трапецеидальной "пилы". Система (40), (41) похожа на уравнения, описывающие течение баротропной сжимаемой жидкости, которые использовались ранее для анализа абберационной самофокусировки света [1]. Принципиальное различие в том, что нелинейность $\sim \gamma$ присутствует в обоих уравнениях. При этом правая часть уравнения (40) ответственна за нелинейное поглощение, а правая часть (41) — за искривление лучей. В оптической задаче нелинейное поглощение отсутствует и система (40), (41) при $m = 0$ решается точно.

В нашем случае система (40), (41) также имеет интересные решения. Для параболической формы фронта (15) точным решением уравнения (40) будет выражение ($m = 1$)

$$I = \frac{1}{f^2(x)} I_0 \left(\frac{r}{af} \right) \left[1 + \alpha\omega\gamma I_0 \left(\frac{r}{af} \right) \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-1}, \quad (42)$$

где функция $I_0 = I_0(r/a) = \langle p^2 \rangle|_{x=0}$ задает поперечное распределение интенсивности волны на входе в среду, a — характерный поперечный размер (радиус) исходного пучка, $f(x)$ — функция, которая описывает изменение амплитуды волны и ширины пучка. С учетом (42) уравнение (41) сводится к нелинейному интегродифференциальному уравнению для функции f :

$$f^3 \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{2x_d x_s} \left[1 + \frac{\alpha}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-2}, \quad (43)$$

где характерные расстояния образования разрыва x_s и дифракции x_d даются следующими комбинациями констант: $x_s = 1/(\omega\gamma p_0^2)$, $x_d = \omega a^2/2c$, а p_0 и ω — характерные начальная амплитуда и частота волны. Уравнение (43) следует решать при граничных условиях

$$f \Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{R}. \quad (44)$$

Здесь R — радиус кривизны волнового фронта на входе в среду. Задача Коши (43), (44) имеет точное решение [58]

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{R} + \delta_1 \frac{x}{x_s} \right)^{\delta_2/(\delta_1+\delta_2)} \left(1 + \frac{x}{R} - \delta_2 \frac{x}{x_s} \right)^{\delta_1/(\delta_1+\delta_2)}, \quad (45)$$

где

$$\delta_{1,2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2x_s/x_d} \pm \alpha}{2}.$$

Отсюда видно, что в пренебрежении дифракцией пучок на расстоянии $x_{sf} = (\delta_2/x_s - 1/R)^{-1}$ сходится в точку.

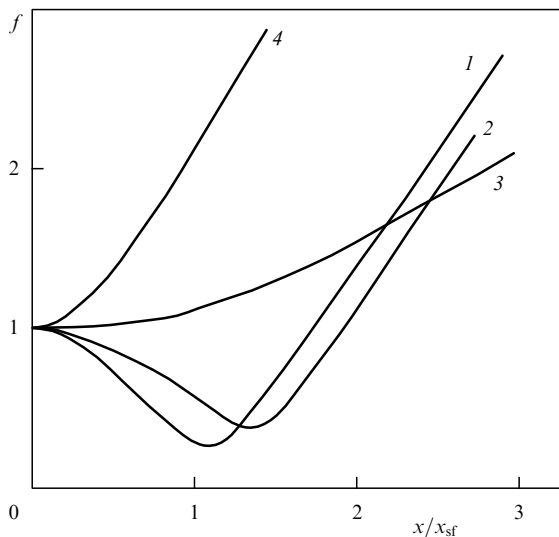


Рис. 12. Зависимость функции f , характеризующей безразмерный поперечный радиус пучка, от безразмерного расстояния вдоль оси x/x_{sf} . Кривые 1–4 рассчитаны при различном соотношении дифракционного и нелинейного масштабов $x_s/x_d = 0,01; 0,1; 0,5$ и 2 соответственно.

Ясно, что на этом этапе пренебрегать дифракцией уже нельзя. Для устранения особенности в фокусе в правую часть уравнения (43) можно добавить дифракционную поправку [58, 68]:

$$f^3 \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{2x_d x_s} \left[1 + \frac{\alpha}{x_s} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')} \right]^{-2} + \frac{1}{x_d^2}. \quad (46)$$

Удивительно, что и в этом случае существует точное аналитическое решение. Его удастся найти благодаря тому, что уравнение (46) линеаризуется при переходе к новой переменной

$$\xi = \frac{x_s}{\alpha x_d} + \frac{1}{x_d} \int_0^x \frac{dx'}{f^2(x')}. \quad (47)$$

С учетом (47) уравнение (46) примет вид

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{1}{f} \right) + \left(1 - \frac{x_s}{\alpha^2 x_d} \frac{1}{\xi^2} \right) \left(\frac{1}{f} \right) = 0. \quad (48)$$

Общее решение (48) выражается через функции Бесселя:

$$f(\xi) = \frac{\xi^{-1/2}}{C_1 J_\nu(\xi) + C_2 Y_\nu(\xi)}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2x_s}{\alpha^2 x_d}}. \quad (49)$$

Константы C_1, C_2 в решении (49) определяются из граничных условий (44) при $x = 0$, т.е. при $\xi = x_s/\alpha x_d$: $f = 1, df/d\xi = x_d/R$. Подробный анализ этого точного решения (определение минимальной ширины пучка, угловой расходимости в дальнем поле, зависимостей ширины пучка и амплитуды волны на оси от расстояния) проведен в работе [68].

На рисунке 12 приведены зависимости ширины пучка от расстояния, нормированного на величину, характеризующую положение нелинейного фокуса в отсутствие дифракции, $x_{sf} = x_s/\delta_2$. На входе фронт был плоским. Кривые 1–4, в порядке возрастания номера, соответствуют уменьшающимся значениям амплитуды волны. Видно, что при слабо выраженной дифракции происходит заметное сужение пучка (кривые 1 и 2), а при сильной дифракции самофокусировка не проявляется (кривые 3 и 4).

На рисунке 13 штриховыми кривыми 1 показано поведение функции f , определяющей ширину пучка, в отсутствие дифракции; кривые построены по формуле (45). Сплошные кривые 2 (для f) и 3 (для "амплитуды пилы" A) построены с учетом дифракционных поправок, т.е. на основе решения уравнения (46). Как видно, на малых расстояниях амплитуда уменьшается из-за нелинейной диссипации энергии, происходящей на фронтах пилообразной волны. Затем нелинейная фокусировка "притормаживает" этот процесс и может даже немного усилить волну в фокальной области. За фокусом пучок становится расходящимся; вследствие расходимости и нелинейного поглощения амплитуда волны уменьшается. Рисунки 13а–в построены в порядке уменьшения исходной амплитуды волны, для значений параметра x_s/x_d , равных $10^{-3}, 10^{-2}$ и 10^{-1} соответственно.

Как следует из рис. 13, в отсутствие дисперсии самофокусировка на кубической нелинейности не приводит к существенному росту амплитуды. Хотя пучок заметно сужается и имеет нелинейную перетяжку, фактор усиления невелик из-за принципиально неустранимого поглощения на ударных фронтах "пилы". Наибольшего усиле-

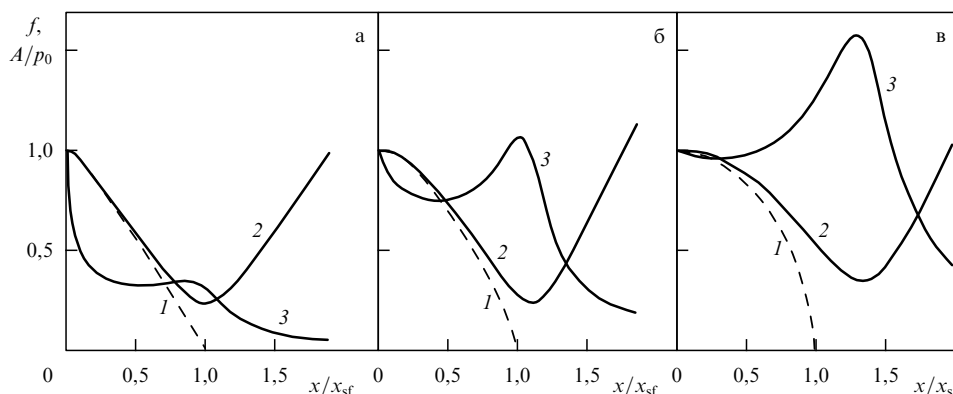


Рис. 13. Зависимость параметров пучка от расстояния вдоль оси при самофокусировке пилообразной волны в среде с кубической нелинейностью в отсутствие дисперсии. Рисунки а, б, в соответствуют различным значениям отношения нелинейного и дифракционного масштабов: $x_s/x_d = 10^{-3}, 10^{-2}$ и 10^{-1} . Штриховые линии 1 описывают поведение безразмерного поперечного радиуса пучка в отсутствие дифракции, кривые 2 — поведение поперечного радиуса при учете дифракции, кривые 3 — поведение амплитуды волны A , нормированной на свое исходное значение p_0 .

ния в фокусе $\sim 1,65$ удается достичь при $x_s/x_d \approx 0,06$ [58]. Таким образом, для пилообразных волн оказывается принципиально невозможным возникновение сильного роста интенсивности волны из-за самофокусировки, т.е. бездисперсный характер среды "выключает" один из ярких нелинейных эффектов, характерных для оптических пучков.

5. Симметрии и законы сохранения для параболического уравнения, описывающего распространение пучков в нелинейной среде

Из сказанного выше видно, что нелинейные параболические уравнения типа (1) и (33), полученные для сред с различным видом нелинейности, описывают самые разнообразные свойства нелинейных волновых пучков. Представляет большой интерес исследование общих свойств решений подобных уравнений, таких, как симметрии и законы сохранения. Рассмотрим обобщенное нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + P(u) \frac{\partial u}{\partial \tau} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (50)$$

где u — функция, описывающая профиль волны, τ — "бегущее" время, x — продольная (вдоль оси пучка) координата, y и z — поперечные координаты. В отсутствие дифракции уравнение (50) превращается в уравнение Римана $\partial u / \partial x + P(u) \partial u / \partial \tau = 0$, т.е. $P(u)$ характеризует нелинейную добавку к линейной скорости волны. Уравнение (50) является обобщением уравнения Хохлова–Заболотской (ХЗ) на случай сред с произвольной нелинейностью. Можно показать, что (50) является квазиоптическим приближением нелинейного волнового уравнения вида

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 N(u)}{\partial t^2},$$

где правая часть может также иметь вид смешанной производной по пространству и времени либо второй производной по пространству от нелинейной функции $N(u)$. Функция P , входящая в уравнение (50), пропорциональна производной функции N по аргументу. Указанная связь обобщенного уравнения ХЗ с нелинейным волновым уравнением означает, что уравнение (50) описывает пучки волн разной природы. Для звуковых пучков в жидкостях и газах u — колебательная скорость или акустическое давление, нелинейность является квадратичной: $P(u) = u$. В случае рассмотренной выше кубической нелинейности $P(u) = u^2$.

Уравнение (50) учитывает два главных эффекта, определяющих поведение волновых пучков: нелинейность и дифракцию. В нем, однако, не учтена диссипация энергии волны, которая играет заметную роль в вязких средах, а также в маловязких средах после образования в профиле волны ударных участков. До возникновения ударных участков описание нелинейного пучка на основе уравнения (50) корректно. Для учета диссипации в квадратные скобки левой части уравнения (50) следует добавить дополнительное слагаемое, пропорциональное $\partial^2 u / \partial \tau^2$ (см. уравнение (58), а также уравнения (1) и (33)).

В силу нелинейности уравнения (1) его решение в общем случае может быть получено лишь численно. Подобный расчет, однако, требует больших затрат машинного времени и не всегда возможен. Поэтому важны и дополнительные подходы к анализу уравнения ХЗ. Наряду с различными приближенными методами упрощения (именно такой подход был использован выше), интерес может представить поиск симметрий этого нелинейного уравнения, которые позволяют выявить некоторые общие свойства его решений и находить определенные классы точных решений и законы сохранения. В качестве примера такого подхода можно привести известную теорию подобия и размерностей, использующую инвариантность уравнения относительно согласованного растяжения координат и самой функции u . Класс симметрий дифференциальных уравнений часто является более широким, чем это следует из соотношений подобия. Для их нахождения существует известная техника, связанная с групповым анализом дифференциальных уравнений [70–73]. Начало исследованию симметрий уравнения ХЗ было положено в статье [74], посвященной двумерному уравнению при квадратичном характере нелинейности ($\partial/\partial y = 0$, $P(u) = u$). Другой подход, связывающий в соответствующем пределе двумерное уравнение ХЗ с уравнением Кадомцева–Петвиашвили, рассматривался в работе [75]. Результаты группового анализа двумерного и трехмерного уравнений ХЗ в случае квадратичной нелинейности $P(u) = u$ приведены в справочнике [76]. В работе [59] были вычислены группы всех точечных (классических) симметрий трехмерного уравнения ХЗ (50) при произвольной гладкой функции $P(u)$.

Уравнение (50) можно представить также в несколько ином виде, если наряду с функцией u использовать связанную с ней величину

$$w = \int u d\tau'. \quad (51)$$

Если u — колебательная скорость, то w имеет смысл смещения частиц среды. Введя обозначения $w_\mu \equiv \partial w / \partial x_\mu$, $w_{\mu\nu} = \partial^2 w / \partial x_\mu \partial x_\nu$, запишем получившееся уравнение как

$$w_{01} + P(w_1)w_{11} - w_{22} - w_{33} = 0. \quad (52)$$

Точечной симметрией дифференциального уравнения называется множество зависящих от непрерывного параметра λ обратимых преобразований переменных вида

$$\tilde{x}_\mu = X_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda), \quad (53)$$

$$\tilde{w} = W(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda),$$

которые переводят решение уравнения в решение этого же уравнения, т.е. новая функция \tilde{w} , рассматриваемая как функция новых переменных \tilde{x}_μ , также является решением [73]. Параметр λ обычно выбирается так, чтобы при $\lambda = 0$ преобразование было тождественным, тогда в первом порядке по λ получаются так называемые инфинитезимальные преобразования

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu + \lambda \varphi_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w), \quad (54)$$

$$\tilde{w} = w + \lambda \psi(x_0, x_1, x_2, x_3, w),$$

где функции φ_μ и ψ задают компоненты касательного векторного поля группы точечных симметрий. По

известным φ_μ и ψ могут быть восстановлены соответствующие конечные преобразования (4) с помощью решения уравнений Ли

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_\mu}{d\lambda} &= \varphi_\mu(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{w}), \\ \frac{d\tilde{w}}{d\lambda} &= \psi(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{w}) \end{aligned} \quad (55)$$

с начальными ($\lambda = 0$) условиями $\tilde{x}_\mu = x_\mu$, $\tilde{w} = w$.

Для уравнения (50) все аналогично. Например, инфинитезимальные преобразования группы точечных симметрий (1) имеют вид $\tilde{x}_\mu = x_\mu + \lambda \vartheta_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, u)$, $\tilde{u} = u + \lambda \eta(x_0, x_1, x_2, x_3, u)$. Техника группового анализа [70, 71, 73] позволяет определить компоненты касательного векторного поля и восстановить конечные инвариантные преобразования (53). Результаты проведенных вычислений для групп всех возможных точечных симметрий уравнений (50) и (52) приведены в статье [59]. Общее количество симметрий составляет более 20. Ряд симметрий, соответствующих инвариантности уравнения относительно сдвигов и поворотов, оказался не зависящим от вида нелинейного члена. Были обнаружены также симметрии, специфические для конкретных видов нелинейности. Например, в случае кубической нелинейности имеется следующая симметрия уравнений (50) и (52):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u(1 + \lambda x_0), \quad \tilde{w} = w(1 + \lambda x_0), \quad \tilde{x}_0 = \frac{x_0}{1 + \lambda x_0}, \\ \tilde{x}_1 &= x_1 - \frac{\lambda}{4} \frac{x_2^2 + x_3^2}{1 + \lambda x_0}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{1 + \lambda x_0}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{1 + \lambda x_0}. \end{aligned} \quad (56)$$

Как видно из структуры указанного инвариантного преобразования, данная симметрия может быть названа "линзовым" преобразованием по аналогии с таким же преобразованием, найденным в работе [77] для уравнения (34), описывающего самовоздействие монохроматических волн в диспергирующей среде. Параметр преобразования λ имеет смысл обратной фокусного расстояния линзы, т.е. равен ее "силе". Отметим, что указанное линзовое преобразование существует также и в линейном случае. Проявлением его, например, является известный в теории дифракции пучков результат о тождественности поперечного распределения амплитуды волны в фокальной плоскости фокусированного источника и диаграммы направленности аналогичного нефокусированного источника в дальней зоне. Необычно, что это свойство выполняется и в среде с кубической нелинейностью независимо от формы волны. Анализ групповых свойств двумерных (щелевых) пучков показал, что линзовое преобразование инвариантно уже не для кубической нелинейности, а для нелинейности пятой степени.

В другом практически важном случае квадратичной нелинейности имеется симметрия, напоминающая линзовое преобразование:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u(1 + \lambda x_0)^{8/5} - \frac{2}{5} \lambda x_1 (1 + \lambda x_0)^{3/5} + \frac{3}{50} \frac{\lambda^2 (x_2^2 + x_3^2)}{(1 + \lambda x_0)^{2/5}}, \\ \tilde{w} &= w(1 + \lambda x_0)^{6/5} - \frac{1}{5} \lambda x_1^2 (1 + \lambda x_0)^{1/5} + \\ &+ \frac{3}{50} \frac{\lambda^2 x_1 (x_2^2 + x_3^2)}{(1 + \lambda x_0)^{4/5}} - \frac{3}{500} \frac{\lambda^3 (x_2^2 + x_3^2)^2}{(1 + \lambda x_0)^{9/5}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \frac{x_0}{1 + \lambda x_0}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{x_1}{(1 + \lambda x_0)^{2/5}} - \frac{3}{10} \lambda \frac{x_2^2 + x_3^2}{(1 + \lambda x_0)^{7/5}}, \\ \tilde{x}_2 &= \frac{x_2}{(1 + \lambda x_0)^{6/5}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{(1 + \lambda x_0)^{6/5}}. \end{aligned} \quad (57)$$

В работе [78] для случаев квадратичной и кубической нелинейностей ($P = u$ и $P = u^2$) был проведен групповой анализ уравнения, отличающегося от уравнения (50) наличием диссипативного члена:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + P(u) \frac{\partial u}{\partial \tau} + A \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (58)$$

Оказалось, что диссипативный член вносит запрет на существование многих симметрий, имеющих в отсутствие диссипации, в частности симметрий (56) и (57). Никаких новых симметрий по сравнению с уравнением (50) не появилось. Общее количество симметрий этого уравнения равно восьми, при этом одна симметрия связана с масштабным преобразованием, а все остальные имеют чисто геометрический смысл сдвигов и поворотов.

Кроме возможности построения новых решений на основе имеющихся решений, симметрии уравнений могут быть применены для нахождения точных решений и законов сохранения обобщенного уравнения ХЗ. Примечательно, что уравнение (52) является уравнением Лагранжа [79]. Действительно, если ввести удельный лагранжиан

$$A = \frac{w_0 w_1}{2} - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2} + F(w_1), \quad (59)$$

где $F(u)$ — дважды проинтегрированная функция $P(u)$ (т.е. $d^2 F/du^2 = P$), то уравнение (52) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial w_\mu} \right) - \frac{\partial A}{\partial w} = 0. \quad (60)$$

Возможность записать уравнение в виде уравнения Лагранжа, как известно [80], означает его эквивалентность принципу наименьшего действия. Аналогично описанному выше поиску точечных симметрий уравнения (52) можно интересоваться такими преобразованиями вида (53), которые не меняют функцию Лагранжа (59). В работе [60] было показано, что все точечные симметрии уравнения (52), за исключением одного масштабного преобразования, являются вариационными. Согласно теореме Нётер, каждой вариационной симметрии соответствует закон сохранения вида $D_\mu j_\mu = 0$, где D_μ — оператор полного дифференцирования по координате x_μ , j_μ — компоненты "тока". Отсюда следует, что для каждой вариационной симметрии величина

$$I = \iiint j_0 dx_1 dx_2 dx_3$$

есть интеграл движения, т.е. $dI/dx_0 = 0$. Знание таких сохраняющихся величин может быть полезно как для контроля численного счета, так и для выявления некоторых общих свойств решений обобщенного уравнения ХЗ. В работе [60] приведен список всех соответствующих интегралов движения. Физический смысл некоторых из

них достаточно нагляден, например один из них пропорционален гамильтониану, другой — полной энергии волны. Другие интегралы не так легко интерпретировать, однако из них можно получить некоторые простые соотношения, если ввести моменты акустического поля. Моменты вводятся как средние, определенные с использованием функции распределения $u^2 = w_1^2$:

$$\langle F \rangle \equiv \frac{\iiint F w_1^2 dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint w_1^2 dx_1 dx_2 dx_3},$$

где F — переменная, для которой определяется момент. Например, величина $\langle x_1 \rangle$ характеризует средний по времени центр волны, $\langle x_{2,3} \rangle$ — поперечные координаты центра поперечного сечения пучка, $\langle r_{\perp}^2 \rangle = \langle x_2^2 + x_3^2 \rangle$ — средний квадрат радиуса поперечного сечения пучка. Совместное рассмотрение нескольких интегралов в случае квадратичной нелинейности, например, приводит к соотношению

$$\frac{d\langle r_{\perp}^2 \rangle}{dx_0} - \frac{4\langle x_1 \rangle}{3} = C_1 + C_2 x_0,$$

т.е. среднеквадратичный поперечный радиус пучка $\sqrt{\langle r_{\perp}^2 \rangle}$ и положение временного центра акустического поля $\langle x_1 \rangle$ оказываются однозначно связанными. В случае кубической нелинейности поведение среднеквадратичного радиуса пучка еще проще. Используя совместно несколько вариационных интегралов движения, один из которых вытекает из линзового преобразования (56), удается получить очень важное соотношение

$$\frac{d^2}{dx_0^2} \langle r_{\perp}^2 \rangle = \text{const} = 8 \frac{\iiint (w_2^2 + w_3^2 - w_1^4/6) dx_1 dx_2 dx_3}{\iiint w_1^2 dx_1 dx_2 dx_3}, \quad (61)$$

т.е. $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ зависит от пройденного волной расстояния по параболическому закону. Интеграл, стоящий в числителе правой части (61), имеет смысл гамильтониана. Если он отрицателен, то на некотором конечном расстоянии величина $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ обратится в нуль, т.е. пучок схлопнется. Таким образом, отрицательность правой части (61) задает достаточный критерий самофокусировки. Этот критерий очень похож на известный критерий Власова – Петрищева – Таланова волнового коллапса, найденный в 1971 г. в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера (34) (где $\beta = 0$) и сыгравший большую роль в описании самофокусировки световых пучков [81]. Похожие критерии позже были получены для широкого класса волновых моделей, в том числе для нелинейного уравнения Шрёдингера, нелинейного уравнения Клейна – Гордона, нестационарного уравнения Гинзбурга – Ландау, уравнения Буссинеска, обобщенного уравнения Кадомцева – Петвиашвили [82]. Однако при расчете гамильтониана в указанных примерах интегрирование производится только по поперечным координатам, в описываемом же здесь случае интегрирование проводится еще и по времени $\tau = x_1$.

В работе [58] рассчитан момент $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ в случае, когда на входе задан гауссов пучок гармонических волн. Оказалось, что самофокусировка может возникнуть в том случае, если характерная нелинейность почти на порядок превышает длину дифракции. При этом до нелинейного фокуса волне нужно пройти расстояние, равное многим нелинейным длинам. И хотя критерий само-

фокусировки (61) является лишь достаточным, эта оценка указывает на то, что самофокусировка без искажения профиля волны и образования ударных участков вряд ли возможна. Расчеты, описанные в предыдущем разделе, подтверждают эту особенность самовоздействия в отсутствие дисперсии.

Отметим еще раз, что возможность записи соотношения (61) возникла благодаря существованию линзового преобразования (56), которое в случае трехмерных пучков имеется лишь в случае кубической нелинейности. Для щелевых пучков соотношение типа (61) можно записать в среде с нелинейностью пятой степени [79], опять же благодаря тому, что в этом случае существует линзовое инвариантное преобразование. В этих двух случаях — для трехмерного пучка в среде с кубической нелинейностью и двумерного щелевого пучка в среде с нелинейностью пятой степени — можно сделать вывод о невозможности устойчивого солитонного (самоканализирующегося) решения. Действительно, при самоканализации величина $\langle r_{\perp}^2 \rangle$ должна сохраняться, т.е. правая часть соотношения (61) должна равняться нулю. Однако флуктуации начального поля могут изменить правую часть (61), среднеквадратичный радиус пучка при этом начнет изменяться в соответствии с (61) и пучок в конечном итоге либо разойдется, либо схлопнется. Возникает вопрос: возможно ли существование устойчивых солитонных решений в рамках уравнения (50) при других видах нелинейности, подобно тому, как это имеет место для волновых пучков при сильной дисперсии? Возможность существования таких решений кажется маловероятной, поскольку два эффекта — нелинейность и дифракция — должны не только обеспечить устойчивую самоканализацию, но и предотвратить нелинейные искажения профиля волны и образование ударных волн.

6. Заключение

Данный обзор является расширенным продолжением предшествующих публикаций [83, 84, 33] с учетом последних достижений в исследовании эффектов самовоздействия сильно искаженных волн, содержащих ударные фронты. В настоящем обзоре, как и в упомянутых выше статьях, сделана попытка собрать и описать основные результаты, относящиеся либо к уже наблюдавшимся явлениям самовоздействия интенсивных акустических пучков, либо к явлениям, наблюдение которых, по мнению авторов, реально и будет осуществлено в обозримом будущем. Существует немало интересных теоретических работ, посвященных таким самовоздействиям сильно искаженных волн, возможность наблюдения которых не очевидна (см., например, [85]). Обсуждение таких работ мы не проводили; их число в списке литературы незначительно.

Один из принципиальных эффектов самовоздействия ударных волн — тепловое самовоздействие, возникающее за счет повышенного тепловыделения на ударных участках. Этот эффект неизбежно возникает в любой нелинейной среде, даже если ее вязкость очень мала. Такой режим тепловой самодефокусировки и фокусировки типичен для практических приложений мощных акустических волн в медицине (терапии), где используются ультразвуковые пучки интенсивностью вплоть до нескольких тысяч ватт на 1 см^2 , при которых ударные волны формируются на расстоянии порядка сантиметра.

Тот факт, что ударные волны сжатия, бегущие по невозмущенной среде, являются сверхзвуковыми, обуславливает другой важный эффект самовоздействия — безынерционную саморефракцию пучков ударно-волновых импульсов. Такое самовоздействие — одна из основных причин ограничения максимально достижимых интенсивностей при фокусировке мощных импульсных сигналов.

Все еще сравнительно мало исследованы эффекты самовоздействия ударных волн в средах с кубической нелинейностью с малой дисперсией. Свойства соответствующих нелинейных волн уникальны и во многом не похожи на свойства хорошо изученных нелинейных квазигармонических волн в сильнодиспергирующих средах. Сложность соответствующих уравнений требует разработки адекватных аналитических и численных методов; многое в этом направлении еще предстоит сделать.

Работа частично поддержана грантами РФФИ и грантом Президента Российской Федерации № НШ-1575.003.02 для поддержки ведущих научных школ.

Список литературы

- Ахманов С А, Сухоруков А П, Хохлов Р В *УФН* **93** 19 (1967)
- Власов С Н, Таланов В И *Самософокусировка волн* (Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 1997)
- Карамзин Ю Н, Сухоруков А П *Письма в ЖЭТФ* **20** 734 (1974)
- Уизем Дж *Линейные и нелинейные волны* (М.: Мир, 1977)
- Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **7** 564 (1964)
- Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **2** 218 (1965)
- Беспалов В И, Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **3** 471 (1966)
- Fink M *Sci. Am.* **281** (5) 91 (1999)
- Hunynen K *Sci. Medicine* **3** (5) 1 (1996)
- Fink M *The e-Journal of Nondestructive Testing* **3** (4) (1998); <http://www.ndt.net/article/0498/fink/fink.htm>
- Ing R K, Fink M *Ultrasonics* **36** 179 (1998)
- Ing R K, Fink M, Casula O *Appl. Phys. Lett.* **68** (2) 161 (1996)
- Руденко О В *УФН* **165** 1011 (1995)
- Лаврентьев Э В, Кузян О И *Взрывы в море* (Л.: Судостроение, 1977)
- Runyan L J, Kane E J "Sonic boom literature survey", Fed. Av. Admin. Rep. FAA-RD-73-129-II, AD771-274 (1973)
- Sapozhnikov O A, Khokhlova V A, Cathignol D J. *Acoust. Soc. Am.* **115** 1982 (2004)
- Зарембо Л К, Красильников В А *Введение в нелинейную акустику; звуковые и ультразвуковые волны большой интенсивности* (М.: Наука, 1966)
- Андреев В Г и др. *Акуст. журн.* **45** (1) 13 (1999)
- Аскаръян Г А *Письма в ЖЭТФ* **4** (4) 144 (1966)
- Бахвалов Н С, Жилейкин Я М, Заболотская Е А *Нелинейная теория звуковых пучков* (М.: Наука, 1982)
- Ассман В А и др. *Письма в ЖЭТФ* **41** 148 (1985)
- Андреев В Г и др. *Письма в ЖЭТФ* **41** 381 (1985)
- Rudenko O V, Sapozhnikov O A, in *Nonlinear Acoustics* (Eds K A Naugol'nykh, L A Ostrovsky) (New York: AIP Press, 1994) p. 104
- Бункин Ф В, Ляхов Г А, Шипилов К Ф *УФН* **165** 1145 (1995)
- Наугольных К А, Островский Л А *Нелинейные волновые процессы в акустике* (М.: Наука, 1990)
- Vinogradov E A, Shipilov K F *Phys. Vibrations* **10** (2) 72 (2002)
- Бункин Ф В, Кравцов Ю А, Ляхов Г А *УФН* **149** 391 (1986)
- Буров А К *Акуст. журн.* **4** (4) 315 (1958)
- Армеев В Ю, Карабутов А А, Сапожников О А *Акуст. журн.* **33** (2) 177 (1987)
- Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Вестник Моск. ун-в. Сер. 3. Физ. Астрон.* **29** (4) 63 (1988)
- Руденко О В, Солуян С И *Теоретические основы нелинейной акустики* (М.: Наука, 1975)
- Новиков Б К, Руденко О В, Тимошенко В И *Нелинейная гидроакустика* (Л.: Судостроение, 1981)
- Руденко О В *Изв. вузов. Радиофизика* **46** 377 (2003)
- Сапожников О А, Синило Т В *Изв. РАН. Сер. физ.* **62** 2371 (1998)
- Пищальников Ю А, Сапожников О А, Синило Т В *Акуст. журн.* **48** 253 (2002)
- Бэйли М Р и др. *Акуст. журн.* **49** 437 (2003)
- Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **34** 644 (1988)
- Карабутов А А, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **35** 67 (1989)
- Le Floch C, Tanter M, Fink M *Appl. Phys. Lett.* **74** 3062 (1999)
- Hallaj I M, Cleveland R O, Hunynen K J. *Acoust. Soc. Am.* **109** 2245 (2001)
- Руденко О В, Сагатов М М, Сапожников О А *ЖЭТФ* **98** 808 (1990)
- Руденко О В, Солуян С И, Хохлов Р В *ДАН СССР* **225** 1053 (1975)
- Андреев В Г, Карабутов А А, Руденко О В *Вестник Моск. ун-в. Сер. 3. Физ. Астрон.* **25** (4) 74 (1984)
- Vason D R *Ultrasound Med. Biol.* **10** 189 (1984)
- Preston R C (Ed.) *Output Measurements for Medical Ultrasound* (New York: Springer-Verlag, 1991)
- Маков Ю Н *Акуст. журн.* **46** 680 (2000)
- Фридман В Е *Акуст. журн.* **28** 551 (1982)
- Наугольных К А, Рой Н А *Электрические разряды в воде* (М.: Наука, 1971)
- Аскаръян Г А, Королев М Г, Юркин А В *Письма в ЖЭТФ* **51** 586 (1990)
- Андреев В Г и др. *Акуст. журн.* **38** 588 (1992)
- Coleman A J, Saunders J E *Ultrasound Med. Biol.* **15** 213 (1989)
- Sarvazyan A P et al. *Ultrasound Med. Biol.* **24** 1419 (1998)
- Дубровский А Н, Сапожников О А *Вестник Моск. ун-в. Сер. 3. Физ. Астрон.* **34** (4) 67 (1993)
- Sturtevant V, Kulkarny V A J. *Fluid Mech.* **73** 651 (1976)
- Higashino F, in *Handbook of Shock Waves* Vol. 2 (Eds G Ben-Dor, O Igra, T Elperin) (San Diego: Academic Press, 2001) p. 397
- Мусатов А Г, Руденко О В, Сапожников О А *Акуст. журн.* **38** 502 (1992)
- Сапожников О А *Акуст. журн.* **37** 760 (1991)
- Руденко О В, Сапожников О А *ЖЭТФ* **106** 395 (1994)
- Кудрявцев А Г, Сапожников О А *Акуст. журн.* **44** 628 (1998)
- Кудрявцев А Г, Сапожников О А *Акуст. журн.* **44** 808 (1998)
- Андреев В Г и др. *Акуст. журн.* **43** 149 (1997)
- Карабутов А А, Руденко О В *Акуст. журн.* **25** 306 (1979)
- Карабутов А А, Руденко О В *ДАН СССР* **248** (5) (1979)
- Fink M, in *Book of Abstracts of "Ultrasonics International 2003" Conf., Granada, Spain, June 30 – July 3, 2003*
- Rudenko O V, in *Advances in Nonlinear Acoustics* (Ed. N Hønbæk) (Singapore: World Scientific, 1993) p. 3
- Руденко О В, Сапожников О А *Квантовая электроника* **20** 1028 (1993)
- Руденко О В, Сухоруков А А *Акуст. журн.* **41** 822 (1995)
- Руденко О В, Сухоруков А А *Изв. РАН. Сер. физ.* **60** (12) 6 (1996)
- Lee-Barty I P, Crighton D G *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A* **323** 173 (1987)
- Овсянников Л В *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978)
- Ибрагимов Н Х *Группы преобразований в математической физике* (М.: Наука, 1983)
- Виноградов А М, Красильщик И С, Лычагин В В *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1986)
- Олвер П *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (М.: Мир, 1989)
- Виноградов А М, Воробьев Е М *Акуст. журн.* **22** 23 (1976)
- Kodama Y *Phys. Lett. A* **129** 223 (1988)
- Ibragimov N H (Ed.) *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations* Vol. 1 *Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws*; Vol. 2 *Applications in Engineering and Physical Sciences*; Vol. 3 *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods* (Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994–1996)

77. Таланов В И *Письма в ЖЭТФ* **11** 103 (1970)
78. Sapozhnikov O A, Kudryavtsev A G, in *Proc. of the 16th Intern. Congress on Acoustics and 135th Meeting of Acoustical Society of America* Vol. 1 (P K Kuhl, L A Crum) (Woodbury, NY: Acoustical Society of America, 1998) p. 529
79. Маков Ю Н, Сапожников О А *Акуст. журн.* **40** 1003 (1994)
80. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1988)
81. Власов С Н, Петрищев В А, Таланов В И *Изв. вузов. Радиофизика* **14** 1353 (1971)
82. Кузнецов Е А *Изв. вузов. Радиофизика* **46** 342 (2003)
83. Руденко О В, Сапожников О А *Вестник Моск. унив. Сер. 3. Физ. Астрон.* **46** 5 (1991)
84. Rudenko O V, Sapozhnikov O A, in *Nonlinear Acoustics* (Research Trends in Physics, Eds K A Naugol'nykh, L A Ostrovsky) (Woodbury, NY: American Institute of Physics, 1994)
85. Khismatullin D B, Akhatov I Sh *Phys. Fluids* **13** 3582 (2001)

Self-action phenomena in shock-containing wave beams

O.V. Rudenko, O.A. Sapozhnikov

*Physics Department, M.V. Lomonosov Moscow State University,
Vorob'evy Gory, 119992 Moscow, Russian Federation
Tel./Fax (7-095) 939-29 36, (7-095) 939-29 52
E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru; oleg@acs366.phys.msu.ru*

Experimental and theoretical research on self-action phenomena in intense beams of waves with a 'sawtooth' time dependence is reviewed. Inertial self- and defocusing processes in quadratically nonlinear media are discussed, related to the formation of acoustic flows and to the heating of the medium due to energy nonlinearly absorbed at the sawtooth wave shock fronts. Effects of shock pulse self-refraction, leading in particular to maximum field values being saturated during focusing, are considered. For cubically nonlinear media, with both 'compression' and 'rarefaction' fronts present in the sawtooth wave, conditions for the self-focusing process to occur in the presence of strong competition from nonlinear wave damping are derived. New mathematical models are discussed, and their symmetry properties, exact solutions, and simulation results are described. The state of the art in the field is characterized in general terms.

PACS numbers: **43.25. + y**, 47.40.Nm, 87.54.Hk

Bibliography — 85 references

Received 18 March 2004, revised 25 April 2004