Октябрь 2003 г. **Том 173, № 10**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Скорости $c/\sqrt{3}$ и $c/\sqrt{2}$ в общей теории относительности

С.И. Блинников, М.И. Высоцкий, Л.Б. Окунь

Рассмотрены радиальные движения частиц в гравитационных полях вне и внутри Земли, Солнца, черной дыры в пренебрежении всеми взаимодействиями, кроме гравитационного. Вне гравитирующих тел существует критическая координатная скорость $\mathrm{v}_{\mathrm{c}} = c/\sqrt{3}$. *Частицы, движущиеся с меньшими скоростями, ускоряются (как яблоко Ньютона), с бóльшими — замедляются (как фотоны). Частицы, падающие внутри имеющего постоянную плотность тела, всегда гравитационно ускоряются: критическая скорость отсутствует. Также рассматривается движение шара внутри башни, когда он брошен сверху (снизу) башни и после упругого отражения внизу (вверху) пойман в начальной точке. При начальной собственной (а не координатной!) скорости* $v_0 = c/\sqrt{2}$ *время полета одинаково как при бросании шара вниз, так и при бросании его вверх.*

PACS numbers: **03.30.+p, 45.50.–j**

Содержание

1. Введение

Хорошо известно, что согласно теории относительности ход часов, вообще говоря, зависит как от гравитационного потенциала, так и от скорости, с которой часы перемещаются. Очевидно, что, в принципе, можно рассматривать бесконечное число пространственно-временны́х координат. Во многих лабораторных экспериментах, таких, в которых гравитационный потенциал остается постоянным (например, внутри небольшой комнаты), удобно поэтому пользоваться так называемым собственным временем τ, определяемым наблюдателем по часам, покоящимся в его системе отсчета (комнате).

Возможно, поэтому многие авторы выделяют собственное время: одни называют его "истинным", другие "физическим", не поясняя, какой смысл вкладывается в данном случае в эти термины. При некотором легкомыслии отсюда можно заключить, что любое координатное время не является физическим и поэтому не заслуживает рассмотрения. В результате многие специалисты по общей теории относительности всегда рассматривают координатные величины (например, координатную скорость) как нефизические, так сказать, "второсортные".

Между тем существует широкий круг задач, в которых координатное время t имеет не меньше физического смысла, чем собственное время τ. Это задачи о движении в статическом гравитационном поле, в котором последнее не зависит от временно́й координаты t. Собственное время имеет ясный физический смысл для сравнения измерений, ведущихся разными наблюдателями при одном и том же гравитационном потенциале, например на одном этаже дома. Но уже для наблюдателей, находящихся на разных этажах, требуется введение поправок, учитывающих различие гравитационных потенциалов. Введение координатного времени при синхронизации часов неизбежно в системе глобального позиционирования GPS (global positioning system), в которой атомные часы установлены на десятках спутников Земли, и вообще в метрологии с учетом общей теории относительности [1, 2], так что говорить о собственной скорости как "истинной" или "физической" в противоположность координатной скорости нелогично.

Впервые статическая сферически-симметричная метрика вне массивного тела (Земли, Солнца, звезд) была рассмотрена Шварцшильдом [3]. С тех пор ей посвящены отдельные главы практически во всех монографиях по общей теории относительности (см., например, [4–7]). Тогда же Шварцшильд рассмотрел метрику внутри сферически-симметричного тела постоянной плотности [8]. Эта статья пользуется меньшей известностью. В данной заметке мы сравним между собой поведение

С.И. Блинников, М.И. Высоцкий, Л.Б. Окунь. Институт теоретической и экспериментальной физики,
117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
Тел. (095) 123-83-93. Факс (095) 127-08-33
E-mail: blinn@sai.msu.su; vysotsky@heron.itep.ru;
okun@heron.itep.ru

Статья поступила 11 апреля 2003 г.,
после доработки 25 июля 2003 г.

координатных скоростей в метриках Шварцшильда [3, 8]. Вопрос о других метриках (координатах) будет рассмотрен в конце статьи.

Как показано в [9–11], для падающих в вакууме на Землю, Солнце (или другую звезду) частиц существует критическая координатная скорость $\mathrm{v_c} = c/\sqrt{3}$, такая, что имеющие ее частицы не ускоряются и не замедляются в первом порядке по ньютоновской константе G.

При $\mathrm{v} < \mathrm{v_c}$ частица ускоряется, примером чему является ньютоново яблоко. При $\mathrm{v} > \mathrm{v_c}$ частица замедляется: хорошо известным примером является фотон. Это замедление приводит к запаздыванию эха от радара (см. [4], гл. 8, § 7) и к отклонению луча света Солнцем (см. [4], гл. 8, § 5).

Очевидно, что должна существовать промежуточная скорость $\mathrm{v_c}$, при которой радиально движущаяся частица "игнорирует" гравитацию. Мы покажем, что снаружи Солнца $\mathrm{v_c} = c/\sqrt{3}$, а внутри Солнца такой критической скорости не существует: любая частица (даже фотон) под действием гравитации ускоряется к центру Солнца.

Дабы выделить эффекты гравитации при движении внутри Солнца, мы рассматриваем такие частицы, для которых влияние других взаимодействий (электромагнитного, сильного и слабого) пренебрежимо мало. Этому критерию удовлетворяют падающие внутри Солнца нейтралино, нейтрино, частицы зеркальной материи [12], либо фотоны, электроны, нуклоны, падающие внутри зеркальной звезды, либо частицы, падающие внутри шахты на Земле.

В разделе 2 вводятся обозначения и получается величина $\mathrm{v_c} = c/\sqrt{3}$ для частицы в слабом гравитационном поле: $r > R \gg r_\mathrm{g}$, где r — радиальная координата частицы, R — радиус звезды, r_g — гравитационный радиус звезды [4–7]. Принимая здесь и в дальнейшем c в качестве единицы скорости, имеем

$$r_\mathrm{g} = 2GM\,, \tag{1}$$

где M — масса звезды, G — гравитационная постоянная.

Случай, когда вне звезды гравитационный потенциал не мал (нейтронные звезды, черные дыры), рассмотрен в разделе 3.

В разделе 4 рассмотрено изменение скорости внутри звезды (при $r < R$) и показано, что как яблоки, так и фотоны ускоряются при падении к центру зеркальной звезды.

В разделе 5 представлен мысленный эксперимент, в котором массивный шар, брошенный вертикально вниз (вверх), упруго отражается массивной пластиной внизу (вверху) и измеряются собственные интервалы времени от броска до возвращения шара τ_+ (τ_-). Показано, что $\tau_+ = \tau_-$, когда собственная скорость v_0, с которой бросается шар сверху и снизу, удовлетворяет условию $v_0 = 1/\sqrt{2}$.

В разделе 6 рассмотрены другие координаты (гармонические и изотропные), которые отличаются от стандартных координат Шварцшильда при $r \sim r_\mathrm{g}$, но отвечают плоскому пространству в пределе $r \to \infty$. В слабых гравитационных полях, т.е. для $r/r_\mathrm{g} \gg 1$, значение критической скорости $1/\sqrt{3}$ меняется незначительно при использовании этих координат ($\sim r_\mathrm{g}^2/r^2$). Что касается $v_0 = 1/\sqrt{2}$, то это значение скорости инвариантно относительно замены координат.

2. Вывод $\mathbf{v_c} = 1/\sqrt{3}$ для $r > R$

Выражение для интервала в случае радиального движения ($\dot\theta = \dot\varphi = 0$) имеет хорошо известную форму, впервые найденную Шварцшильдом [3]:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\,\mathrm{d}t^2 - g_{rr}\,\mathrm{d}r^2 \equiv \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}l^2\,, \tag{2}$$

где

$$g_{00} = 1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\,, \tag{3}$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{g_{00}}\,. \tag{4}$$

Свяжем так называемые локальную (собственную) скорость v и координатную скорость v. Локальная скорость измеряется местным наблюдателем, покоящимся в точке r, без учета того, что темп используемых им стандартных часов и длина его стандартной линейки зависят от гравитационного потенциала и, следовательно, от r:

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\tau}\,, \tag{5}$$

где собственные координаты l и τ определены в уравнении (2).

Координатная скорость измеряется тем же наблюдателем, который, однако, учитывает, что стандартные часы и линейка зависят от гравитационного потенциала в точке r, и потому пользуется координатами r и t. Этот учет, в частности, приводит к тому, что измеренная им скорость v совпадает со скоростью v, измеренной наблюдателем, бесконечно удаленным от источника гравитационного поля:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{v} = v\left(\frac{g_{00}}{g_{rr}}\right)^{1/2}, \tag{7}$$

$$\mathrm{v} = v g_{00}\,. \tag{8}$$

Последнее уравнение следует из (7) и (4). Из (3) и (4) также видно, что при $r = \infty$ значения $g_{00}(\infty) = g_{rr}(\infty) = 1$.

Интервал координатного времени для радиального движения от пункта a до пункта b дается интегралом

$$t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{v}}\,. \tag{9}$$

Поэтому для запаздывания эхо от радара, находящегося достаточно далеко от гравитирующего тела, релевантна скорость v.

Для движения частицы в постоянном гравитационном поле сохраняющаяся энергия вводится по формуле

$$E = \frac{m\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{10}$$

(см. [5], уравнение (88.9)). В этом случае закон сохранения энергии

$$E(r = \infty) = E(r)\,, \tag{11}$$

позволяет определить $v(r)$:

$$1 - v^2 = (1 - \mathrm{v}_\infty^2)\, g_{00}\,. \tag{12}$$

Таким образом, для падающей массивной частицы собственная скорость v растет. Поведение координатной скорости $\mathrm{v}(r)$ более сложно:

$$1 - \frac{\mathrm{v}^2}{g_{00}^2} = (1 - \mathrm{v}_\infty^2)\, g_{00}\,. \tag{13}$$

При $r > R \gg r_\mathrm{g}$, когда гравитационное поле слабо, из (13) и (4) получаем

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_\infty^2 + \frac{r_\mathrm{g}}{r}\,(1 - 3\mathrm{v}_\infty^2)\,. \tag{14}$$

Для $\mathrm{v}_\infty \ll 1$ имеем хорошо известное уравнение для ускоряющейся нерелятивистской частицы:

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_\infty^2 + \frac{2MG}{r}\,. \tag{15}$$

Для $\mathrm{v}_\infty = \mathrm{v}_\mathrm{c} = 1/\sqrt{3}$ скорость не зависит от r: $\mathrm{v} = \mathrm{v}_\infty$. Для $\mathrm{v}_\infty > \mathrm{v}_\mathrm{c}$ частица при свободном падении замедляется.

Естественно, что при нерадиальном движении пролетающее мимо Солнца массивное тело отклоняется на больший угол, чем свет:

$$\theta = \frac{1}{2}\,\theta_\gamma(1 + \mathrm{v}_\infty^{-2})\,, \tag{16}$$

$$\theta_\gamma = \frac{2r_\mathrm{g}}{R}\,. \tag{17}$$

Здесь R — расстояние наибольшего сближения фотона, испущенного дальней звездой, с Солнцем (см. [7], задача 15.9, уравнение (13)).

3. Поведение v вне черной дыры

Для неслабого гравитационного поля ($r_\mathrm{g}/r \sim 1$) получаем

$$1 - \frac{\mathrm{v}^2}{(1 - r_\mathrm{g}/r)^2} = (1 - \mathrm{v}_\infty^2)\left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\right), \tag{18}$$

$$\mathrm{v}^2 = \left[1 - (1 - \mathrm{v}_\infty^2)\left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)\right]\left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^2. \tag{19}$$

Для $\mathrm{v}_\infty = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\mathrm{v}^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2r_\mathrm{g}}{r}\right)\left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{r}\right)^2. \tag{20}$$

При $r_\mathrm{g}/r \ll 1$ членами порядка $(r_\mathrm{g}/r)^2$ и $(r_\mathrm{g}/r)^3$ можно пренебречь, и из (18), (20) следует, что $\mathrm{v}^2 = 1/3$ вне зависимости от r. При $r_\mathrm{g}/r \sim 1$ поведение $\mathrm{v}(r)$ меняется; в частности, из (19) видно, что $\mathrm{v}(r_\mathrm{g}) = 0$ вне зависимости от ее начального значения v_∞.

Для $\mathrm{v}_\infty > 1/\sqrt{3}$ координатная скорость монотонно падает с уменьшением r, т.е. даже умеренно релятивистская частица ведет себя, как фотон.

Для $\mathrm{v}_\infty < 1/\sqrt{3}$ частица сначала ускоряется и максимальное значение координатной скорости оказывается равным

$$\mathrm{v}_\mathrm{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\frac{1}{1 - \mathrm{v}_\infty^2} \tag{21}$$

при

$$r_\mathrm{max} \equiv r(\mathrm{v}_\mathrm{max}) = \frac{3(1 - \mathrm{v}_\infty^2)}{1 - 3\mathrm{v}_\infty^2}\, r_\mathrm{g}\,. \tag{22}$$

Затем частица начинает замедляться подобно фотону. Интересно, что

$$v(\mathrm{v}_\mathrm{max}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{23}$$

Таким образом, при нулевом координатном ускорении собственная скорость частицы равна $1/\sqrt{3}$.

4. Поведение v внутри звезды

Как было сказано во введении, мы пренебрегаем всеми взаимодействиями, кроме гравитационного.

Метрика внутри небесного тела постоянной плотности (грубая модель звезды) была найдена Шварцшильдом [8] (см. также [4], гл. 11, § 6). Для радиального движения

$$g_{00} = \frac{1}{4}\left[3\left(1 - \frac{r_\mathrm{g}}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{r_\mathrm{g} r^2}{R^3}\right)^{1/2}\right]^2, \tag{24}$$

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{r_\mathrm{g} r^2}{R^3}\right)^{-1}, \tag{25}$$

где R — радиус звезды. Поэтому теперь $g_{rr} \neq 1/g_{00}$ и, хотя уравнение (7) по-прежнему имеет место, уравнение (8) нарушено.

В слабом поле, для которого $r_\mathrm{g}/R \ll 1$ (заметим, что условие $r_\mathrm{g}/R < 1$ необходимо для устойчивости звезды),

$$g_{00} = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{r_\mathrm{g}}{R} + \frac{1}{2}\,\frac{r_\mathrm{g} r^2}{R^3}\,, \tag{26}$$

$$\mathrm{v} = v\left(\frac{g_{00}}{g_{rr}}\right)^{1/2} = v\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{r_\mathrm{g}}{R} - \frac{1}{2}\,\frac{r_\mathrm{g} r^2}{R^3}\right)^{1/2} = $$

$$= v\left(1 - \frac{3}{4}\,\frac{r_\mathrm{g}}{R} - \frac{1}{4}\,\frac{r_\mathrm{g} r^2}{R^3}\right). \tag{27}$$

Для фотона $v = 1$, и поэтому даже фотон ускоряется, двигаясь к центру (зеркальной) звезды, будучи внутри нее. Отметим изменение знака производной координатной скорости фотона при пересечении границы звезды ($r = R$).

5. Мысленный эксперимент в башне и критическая скорость

Очевидно, что появление критической скорости никак не связано с бесконечной удаленностью наблюдателя от гравитирующего тела. Представим себе стоящую на поверхности земли башню и физика, имеющего стальной шар, металлическое зеркало, упруго отражающее этот шар, и часы. Проводится серия опытов, каждый из которых состоит из двух частей. В первой части физик бросает шар с начальной локальной скоростью $v_0 = \mathrm{d}l^+/\,\mathrm{d}\tau^+$ с верхушки башни в лежащее у основания башни зеркало и ловит упруго отскочивший шар. Замеряется локальное в верхней точке башни время τ^+, за которое шар проделывает описанный путь.

Во второй части зеркало крепится на верхушке башни, а физик бросает с той же начальной скоростью $v_0 = \mathrm{d}l^-/\mathrm{d}\tau^-$ шар с земли вверх. Отразившийся от зеркала шар ловится на поверхности земли. Шар проделывает тот же путь, что и в первой части, за локальное для нижней точки башни время τ^-. Сначала шар бросается с нерелятивистской скоростью $v_0 \ll c$, и, естественно, оказывается, что $\tau^+ < \tau^-$. В последующих опытах начальная скорость увеличивается. При $v_0 = v_c = 1/\sqrt{2}$ имеем $\tau^+ = \tau^-$; при $v_0 > v_c$ оказывается, что $\tau^+ > \tau^-$. Это удивительное неравенство означает, что брошенный сверху шар путешествует дольше, чем подброшенный снизу, при $1/\sqrt{2} < v_0 \leqslant 1$ (равенство имеет место для светового луча). Его причина та же, что и "покраснение" испущенных снизу башни фотонов при их детектировании на ее верху, зафиксированное Паундом и Ребкой, т.е. замедление хода часов в гравитационном поле.

Демонстрация сделанных утверждений с помощью формул покажет ниже, что критическая скорость $v_c = 1/\sqrt{2}$ вне зависимости от силы гравитационного поля; необходимо лишь, чтобы размер башни был много меньше расстояния до центра гравитирующего тела и чтобы шар (и самого физика) не разорвали приливные силы.

Приведем формулы, из которых следуют сделанные выше утверждения. Интервал локального времени для находящегося на верхушке башни наблюдателя равен:

$$\mathrm{d}(\tau^+)^2 = g_{00}^+\,\mathrm{d}t^2 \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r^+}\right)\mathrm{d}t^2\,, \tag{28}$$

где r^+ — радиальная координата верхушки башни в шварцшильдовых координатах. Время полета шара по часам этого наблюдателя равно

$$\tau^+ = 2\int \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau^+} = \frac{2}{(1 - r_g/r^+)^{1/2}} \int \frac{\mathrm{d}r}{\dfrac{1}{1 - r_g/r^+}\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}\,. \tag{29}$$

Заметим, что результат (29) непосредственно следует из формул (9) и (28).

Дабы найти, чему равно $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, напишем выражение для локальной скорости, инвариантной относительно замены координат:

$$v = \left(\frac{g_{rr}}{g_{00}}\right)^{1/2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 - r_g/r}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,, \tag{30}$$

и воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{1 - v_0^2}{1 - r_g/r^+} = \frac{1 - v^2}{1 - r_g/r}\,, \tag{31}$$

где v_0 — начальная скорость шара. Из формул (30) и (31) для квадрата знаменателя подынтегрального выражения в (29) получаем

$$\frac{1}{(1 - r_g/r^+)^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r^+}\right)^2 \times \left[1 - \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r^+}\,(1 - v_0^2)\right]. \tag{32}$$

Далее пишем $r = r^+ - \varepsilon$ (ε меняется от нуля до h, где h — высота башни в шварцшильдовых координатах) и раскладываем (32) по ε, удерживая первые два члена (такое разложение предполагает, что высота башни h много меньше $r^+ - r_g$):

$$\frac{1}{(1 - r_g/r^+)^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v_0^2 + \frac{r_g}{(r^+)^2(1 - r_g/r^+)}\,\varepsilon(1 - 3v_0^2)\,, \tag{33}$$

причем мы не требуем слабости гравитационного поля.

Подставляя (33) в (29), имеем

$$\tau^+ = \frac{2}{(1 - r_g/r^+)^{1/2}} \times \int_0^h \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{v_0\left[1 + \dfrac{r_g(1 - 3v_0^2)}{2(r^+)^2(1 - r_g/r^+)\,v_0^2}\,\varepsilon\right]}\,, \tag{34}$$

при этом предполагаем, что $v_0^2 \gg hr_g/(r^+)^2 = 2gh$.

Аналогично для времени полета шара, бросаемого снизу, по часам нижнего наблюдателя получаем

$$\tau^- = \frac{2}{(1 - r_g/r^-)^{1/2}} \times \int_0^h \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{v_0\left[1 - \dfrac{r_g(1 - 3v_0^2)}{2(r^-)^2(1 - r_g/r^-)\,v_0^2}\,\varepsilon\right]}\,, \tag{35}$$

где $r^- = r^+ - h$. При $v_0 = \mathrm{v_c} = 1/\sqrt{3}$ интегралы в (34) и (35) совпадут, однако время τ^+ будет все еще меньше, чем τ^- из-за различия множителей перед интегралами.

Для нахождения критической скорости разложим подынтегральные выражения по ε и вычислим интегралы:

$$\tau^+ = \frac{2h}{v_0(1 - r_g/r^+)^{1/2}} - \frac{h^2}{v_0(1 - r_g/r^+)^{1/2}}\,\frac{r_g(1 - 3v_0^2)}{2(r^+)^2(1 - r_g/r^+)\,v_0^2}\,, \tag{36}$$

$$\tau^- = \frac{2h}{v_0(1 - r_g/r^-)^{1/2}} + \frac{h^2}{v_0(1 - r_g/r^-)^{1/2}}\,\frac{r_g(1 - 3v_0^2)}{2(r^-)^2(1 - r_g/r^-)\,v_0^2}\,.$$

Приравнивая времена полета шаров, получим, что они сравниваются при $v_0 \equiv v_c = 1/\sqrt{2}$. При этом

$$\tau^+ = \tau^- = \frac{2h}{v_c\left[1 - 2r_g/(r^+ + r^-)\right]^{1/2}}\,. \tag{37}$$

Ставя опыты в башне, помещенной в шахту, мы обнаружим отсутствие критической скорости; см. раздел 4.

6. Изотропные и гармонические координаты

Покажем, что критическая координатная скорость $\mathrm{v_c}$ численно равна $1/\sqrt{3}$ не только в шварцшильдовых, но и в изотропных, гармонических, а также в любых других асимптотически плоских координатах, связанных со шварцшильдовыми соотношениями

$$t' = t\,, \quad r' = r + \mathrm{const} + O\left(\frac{r_{\mathrm{g}}^2}{r^2}\right).$$

Согласно известным формулам интервал в изотропных координатах есть ([4], гл. 8, § 1–3)

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(1 - GM/2\rho)^2}{(1 + GM/2\rho)^2}\,\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^4 (\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\,.$$

Тогда в слабом поле при $\rho \to \infty$ для радиального движения ($\mathrm{d}\theta = 0,\ \mathrm{d}\phi = 0$) имеем

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{\rho}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2GM}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho^2\,.$$

В гармонических координатах

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1 - GM/R}{1 + GM/R}\,\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{GM}{R}\right)^2 \mathrm{d}\mathbf{X}^2 - \frac{1 + GM/R}{1 - GM/R}\,\frac{G^2M^2}{R^4}\,(\mathbf{X}\cdot\mathrm{d}\mathbf{X})^2\,,$$

где

$$X_1 = R\sin\theta\cos\phi\,, \quad X_2 = R\sin\theta\sin\phi\,,$$

$$X_3 = R\cos\theta\,, \quad R^2 \equiv \mathbf{X}^2\,.$$

Таким образом, при $\mathrm{d}\theta = 0,\ \mathrm{d}\phi = 0$ интервал в гармонических координатах имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1 - GM/R}{1 + GM/R}\,\mathrm{d}t^2 - \left[\left(1 + \frac{GM}{R}\right)^2 + \frac{1 + GM/R}{1 - GM/R}\,\frac{G^2M^2}{R^2}\right]\mathrm{d}R^2\,.$$

При $R \to \infty$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 + \frac{2GM}{R}\right)\mathrm{d}R^2$$

с точностью $O(r_{\mathrm{g}}^2/R^2)$, т.е. с этой точностью в шварцшильдовых, изотропных и гармонических координатах метрика выглядит одинаково.

Повторяя вывод формул (18) и (19) для произвольных координат (r, t) в сферически-симметричной статической метрике, когда для радиального движения можно написать

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(r)\,\mathrm{d}t^2 - g_{rr}(r)\,\mathrm{d}r^2\,,$$

и обобщая их на случай, когда начальная локальная ("физическая") скорость v_0 задана необязательно на бесконечности, а при произвольном $r = r_0$, получаем

$$1 - \mathrm{v}^2\,\frac{g_{rr}(r)}{g_{00}(r)} = (1 - v_0^2)\,\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r_0)}\,, \tag{38}$$

$$\mathrm{v}^2 = \left[1 - (1 - v_0^2)\,\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r_0)}\right]\frac{g_{00}(r)}{g_{rr}(r)}\,. \tag{39}$$

В рассмотренных нами случаях в слабых полях

$$g_{rr}(r) = \frac{1}{g_{00}(r)} + O\left(\frac{r_{\mathrm{g}}^2}{r^2}\right),$$

т.е. координатная скорость изменяется с радиусом как

$$\mathrm{v}^2 = \left[1 - (1 - v_0^2)\,\frac{g_{00}(r)}{g_{00}(r_0)}\right] g_{00}^2(r)\,. \tag{40}$$

Отсюда непосредственно видно, что *координатное* ускорение равно нулю, когда локальная скорость есть $v_0 = 1/\sqrt{3}$ во всех рассмотренных координатах. В этих координатах на бесконечности $\mathrm{v} = v$, т.е. $\mathrm{v_c} = 1/\sqrt{3}$ при $r_0 = \infty$, что и доказывает сделанное выше утверждение.

7. Заключение

Как показано в предыдущих разделах, в сферически-симметричном гравитационном поле существуют две критические скорости: собственная $v_{\mathrm{c}} = 1/\sqrt{2}$ и координатная $\mathrm{v_c} = 1/\sqrt{3}$. Первая из них инвариантна по определению относительно замены координат, вторая с высокой точностью одна и та же в стандартных координатах Шварцшильда, изотропных и гармонических координатах, которые широко используются как при синхронизации часов на спутниках, так и при анализе движения двойных нейтронных звезд и других релятивистских астрофизических объектов. Попутно подвергнута критике терминология, согласно которой собственное время локального наблюдателя называется "истинным" или "физическим".

Разумеется, существование в теории критических скоростей $c/\sqrt{3}$ и $c/\sqrt{2}$ ни в малейшей степени не уменьшает фундаментальной роли предельной скорости распространения сигналов c. Однако знакомство читателя с критическими скоростями в шварцшильдовых координатах несомненно углубит понимание им общей теории относительности, поскольку "шварцшильдовые координаты разумны, недвусмысленны, полезны и часто используются" (см. [6], Т. 2, с. 526).

Благодарности. Мы благодарны С. Дезеру и Б. Текину, указавшим нам после публикации работы [11] на более ранние работы [9, 10].

Мы признательны анонимному рецензенту, благодаря усилиям которого статья была существенно расширена.

Работа частично поддержана грантом ФС НТП ФЯФ 40.052.1.1.1112 грантом РФФИ 02-02-16500 и ИЛЕ в университете Осаки (С.Б.) фондом Гумбольдта (Л.О.).

Список литературы

1. Ashby N, Allen D W *Radio Science* **14** 649 (1979)
2. Guinot B *Metrologia* **34** 261 (1997)
3. Schwarzschild K *Sitzungsber. Deutsch. Acad. Wissenschaft Berlin Kl. Math. Phys. Tech.* 189 (1916)
4. Вейнберг С *Гравитация и космология* (М.: Мир, 1975)
5. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Физматлит, 2001)
6. Мизнер Ч, Торн К, Уиллер Дж *Гравитация* (М.: Мир, 1977)
7. Лайтман А, Пресс В, Прайс Р, Тюкольски С *Сборник задач по теории относительности и гравитации* (М.: Мир, 1979)
8. Schwarzschild K *Sitzungsber. Deutsch. Acad. Wissenschaft Berlin Kl. Math. Phys. Tech.* 424 (1916)
9. Carmeli M *Lett. Nuovo Cimento* **3** 379 (1972)

10. Carmeli M *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory* (New York: J. Wiley, 1982)
11. Blinnikov S I, Okun L B, Vysotsky M I, gr-qc/0111103; in *Proc. to the Workshops "What Comes Beyond the Standard Model 2000, 2001"* Vol. 1 *Festschrift Dedicated to the 60th Birthday of Holger Bech Nielsen* (Bled Workshops in Physics, Vol. 2, No 2, Eds N M Borštnik, C D Froggatt, D Lukman) (Ljubljana: DMFA–Založništvo, 2001) p. 115; hep-ph/0212221
12. Кобзарев И Ю, Окунь Л Б, Померанчук И Я *ЯФ* **3** 1154 (1966)

Velocities $c/\sqrt{3}$ and $c/\sqrt{2}$ in general theory of relativity

S.I. Blinnikov, M.I. Vysotskiĭ, L.B. Okun'
Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Cheremushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (*7-095*) *123-83 93*
Fax (*7-095*) *127-08 33*
E-mail: *blinn@sai.msu.su*; *vysotsky@heron.itep.ru*; *okun@heron.itep.ru*

We consider a few thought experiments of radial motion of massive particles in the gravitational fields outside and inside various celestial bodies: Earth, Sun, black hole. All other interactions except gravity are disregarded. For the outside motion there exist critical coordinate velocity $\mathrm{v_c} = c/\sqrt{3}$: particles with $\mathrm{v} < \mathrm{v_c}$ are accelerated by the field, like Newtonian apples, particles with $\mathrm{v} > \mathrm{v_c}$ are decelerated like photons. Particles moving inside a body with constant density have no critical velocity; they are always accelerated. We consider also the motion of a ball inside a tower, when it is thrown from the top (bottom) of the tower and after classically bouncing at the bottom (top) comes back to the original point. The total time of flight is the same in these two cases if the initial proper velocity v_0 is equal to $c/\sqrt{2}$.

PACS numbers: **03.30.+p**, **45.50.–j**

Bibliography — 12 references

Received 11 April 2003, revised 25 July 2003