

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Измерение гравитационной постоянной в учебной лаборатории

Н.С. Степанов, А.В. Шишарин

Описывается установка, позволяющая в условиях обычного лабораторного практикума для студентов провести измерение гравитационной постоянной. Установка содержит крутильный маятник, который в ходе эксперимента раскачивается за счет сил гравитационного притяжения со стороны дополнительных грузов с помощью специального устройства периодически в такт колебаниям маятника, меняющих свое положение. Гравитационная постоянная вычисляется по амплитуде установившихся колебаний. Излагается процедура эксперимента и расчетов, приводятся оценки погрешности измерений.

PACS numbers: 01.50.Pa, 04.80.Cc, 06.20.Jr

Содержание

1. Введение (609).
 2. Описание установки и методика измерений (610).
 3. Вычисление гравитационной постоянной (612).
 4. Заключение (613).
- Список литературы (613).

1. Введение

Хорошо известно, что измерения так называемых мировых констант (скорости света, заряда электрона, постоянной Планка, гравитационной постоянной) имеют исключительно важное значение, а методы и установки, позволяющие повысить точность измерений, непрерывно совершенствуются. Основные методы таких измерений обсуждаются в лекционных курсах общей физики, а по некоторым из них поставлены и лабораторные работы, включенные в университетские практикумы. Например, обычными являются установки, воспроизводящие опыты Милликена по измерению заряда электрона, Франка и Герца по измерению постоянной Планка, известны и различные лабораторные методы измерения скорости света.

Измерение же гравитационной постоянной G в этом смысле стоит несколько особняком. Хотя первые довольно точные измерения гравитационной постоянной с помощью "крутильных весов" были проведены Кавендишем еще в конце XVIII века, а затем было поставлено много других, более точных экспериментов (см., напри-

мер [1]), до недавнего времени не было предложено установок, адаптированных к условиям учебной лаборатории. Это объясняется прежде всего тем, что из-за относительной малости измеряемых гравитационных сил установка должна обладать очень высокой чувствительностью и поэтому становится уязвимой к различным помехам, неизбежным в студенческой лаборатории. В частности, в случае крутильных весов требуется нить подвеса с весьма малым модулем кручения D , поэтому различные сотрясения, потоки воздуха и т.д. вызывают флуктуации начального положения (или, в терминах измерительной техники, — характерный для высокочувствительных установок "дрейф нуля") и делают процедуру юстировки довольно сложной. Очевидно также, что использовавшийся в опытах Кавендиша и некоторых других способ вычисления G по статическим отклонениям весов требует больших масс грузов и громоздких установок, неприемлемых в учебной лаборатории. Начиная с Хейля (1930 г.), высокоточные измерения гравитационной постоянной чаще всего осуществляют по весьма небольшому эффекту изменения периода колебаний при повороте линии расположения притягивающих грузов по отношению к крутильным весам. В последние годы появились сообщения о разработке достаточно компактных установок такого типа, в принципе пригодных для использования в учебных лабораториях, однако они требуют довольно дорогостоящих дополнительных устройств (расположения крутильного маятника в вакууме, специальных лазеров с тонким пучком для измерения малых поворотов, прецизионного контроля периода колебаний и т.д.). Насколько известно авторам данной заметки, по крайней мере отечественные вузы такими установками не располагают, а имеющиеся в литературе рекламные сообщения [1] не содержат сколько-нибудь подробной информации о конструкции и параметрах установок, способствующих их воспроизведению.

В связи с этим в настоящей заметке описывается разработанная авторами установка, не нуждающаяся в подобных усложнениях и, тем не менее, за разумное

Н.С. Степанов, А.В. Шишарин. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603600 Нижний Новгород, просп. Гагарина 23, Российская Федерация
Тел. (8312) 65-81-73. Факс (8312) 65-64-16
E-mail: stepanov@rf.unn.runnet.ru

Статья поступила 17 июля 2001 г.,
после доработки 13 сентября 2001 г.

время (не более двух часов, включая ознакомление с самой установкой и процедуру экспериментов) способная провести циклы измерений, на основе которых гравитационная постоянная определяется с неплохой для учебных лабораторий точностью (не хуже 10–15 %).

2. Описание установки и методика измерений

Общий вид установки представлен на рис. 1; габариты ее не превышают 1,4 м по высоте и 40 см в основании, так что она свободно помещается на стандартном лабораторном столе. Как и в вышеупомянутых опытах, основу установки составляет крутильный маятник в виде "гантели" из двух одинаковых свинцовых грузов m (закрепленных на легком стержне из оргстекла), подвешенной вертикально на тонкой нити. Установка позволяет в ходе эксперимента к каждому из грузов m периодически приближать то с одной, то с другой стороны более массивные грузы M (также из свинца), что вызывает резонансную раскачку колебаний. В нашей

установке было выбрано $m = 0,28$ кг, $M = 2,24$ кг, длина плеча маятника $l = 7,5$ см, расстояние (зазор) между грузами m и M в ближнем положении $d = 1,2$ см; все эти цифры, естественно, не являются критичными. Значение гравитационной постоянной в принципе можно вычислить либо по динамике раскачки вынужденных колебаний, т.е. временной зависимости их амплитуды $A_G(t)$, либо, что проще, по амплитуде колебаний в установившемся режиме (см. ниже). Принципиальное преимущество такого резонансного метода по сравнению с методикой Хейля состоит в том, что здесь не требуется измерять очень малые поправки к периоду собственных колебаний и потому нет необходимости (по крайней мере, для учебных целей) в использовании прецизионной измерительной аппаратуры.

Обратимся к рис. 1 и отметим некоторые особенности установки и процедуры измерений на ней. Угол отклонения маятника $\theta(t)$ в процессе его качаний, как обычно, фиксируется по шкале 12 через зрительную трубу (на рисунке не указана) с помощью подсвечивающего луча 13. В качестве источника можно использовать обычную лампу накаливания с коллимирующим устройством или какой-либо другой (на рисунке они не приведены), а отраженный от зеркальца 14 луч направляется к шкале 12, расположенной по другую сторону от маятника, с помощью дополнительного зеркала 15 с подфокусирующей линзой. Цена деления шкалы определяется с помощью дополнительных калибровочных устройств, на рисунке также не показанных, поэтому цена деления сообщается студентам заранее.

Крутильный маятник находится при атмосферном давлении, хотя для защиты от внешних потоков воздуха помещен в прозрачный кожух из оргстекла. Главная идея в конструкции установки направлена на преодоление упомянутого выше "дрейфа нуля". В самом деле, если не принимать специальных мер, даже в отсутствие потоков воздуха остаточные напряжения нити, небольшие изменения температуры и влажности приводят к случайным "уходам" маятника. Для их удаления мы брали подвес из многонитового (специально расплетенного) капрона с пренебрежимо малым модулем кручения, а возвратный момент силы $M_D = -D\theta$, определяющий "квазиупругость" установки по отношению к поворотам ее вокруг вертикальной оси от начального положения, создавался с помощью дополнительных легких грузиков b с массой $\Delta m \ll m$, прикрепляемых капроновыми нитями поперек стержня маятника (см. рис. 1). Такой способ удобен и тем, что подбором массы этих грузиков (мы брали $\Delta m = 1,5$ г) и регулировкой их подвески с помощью винта 10 можно в широких пределах варьировать эффективное значение модуля упругости D установки и, тем самым, период собственных колебаний маятника T . Удобно выбирать $T = 30-60$ с с тем, чтобы за время лабораторного эксперимента можно было засечь достаточно много (несколько десятков) периодов и, в частности, осуществить установившийся режим вынужденных колебаний. В результате на нашей установке удается практически избавиться от флуктуаций нулевой точки, а с помощью специальных регулировочных винтов 8 и 9 (см. рис. 1) фиксировать ее в центре шкалы. В то же время для малых амплитуд колебаний $|\theta(t)| \ll \pi/2$ линейный закон упругости $M_D = -D\theta$ хорошо выполняется. Поэтому процесс колебаний маятника можно описать обычным уравне-

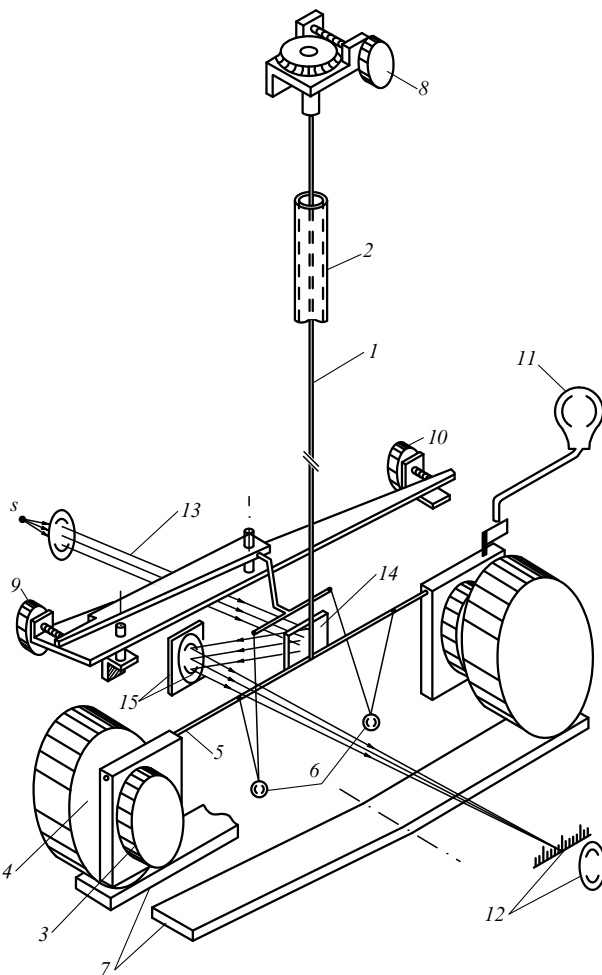


Рис. 1. Схематическое изображение установки: 1 — нить подвеса маятника, 2 — защитная трубка, 3 — грузы m маятника, 4 — притягивающие грузы M , 5 — стержень маятника, 6 — дополнительные грузики Δm , обеспечивающие квазиупругость системы, 7 — направляющие дорожки для перекачивания грузов M ; 8, 9 — винты грубой и точной установки нуля, 10 — винт плавной регулировки периода колебаний маятника, 11 — резиновая груша, 12 — окулярная линза, 13 — подсвечивающий пучок света, 14 — зеркальце маятника, 15 — отражающее зеркало с подфокусирующей линзой.

нием линейного осциллятора с затуханием

$$\ddot{\Theta} + 2\delta\dot{\Theta} + \omega_0^2 = \frac{M_G(t)}{I}, \quad (1)$$

где I — момент инерции маятника ($I = 2ml^2$), $\omega_0^2 = D/I$, $M_G(t) = 2lF_G(t)$ — момент гравитационных сил F_G , зависящих от положения грузов M , δ — коэффициент затухания.

Входящие в (1) параметры ω_0 и δ можно определить в ходе предварительного эксперимента, наблюдая затухающие свободные колебания маятника при $M_G(t) = 0$. Для возбуждения последних в корпус установки вмонтирована трубка (см. рис. 1), через которую с помощью резиновой груши II вдвигается струя воздуха, выводящая систему из равновесия. Как известно, решение (1) при $M_G(t) = 0$ имеет вид [2]

$$\Theta(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad A(t) = A_0 \exp(-\delta t), \quad (2)$$

где $\omega = (\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}$, A_0 , φ_0 — начальные амплитуда и фаза. Для достаточно высокой добротности осциллятора ($Q = \omega_0/2\delta \gg 1$) имеем $\omega \approx \omega_0 = 2\pi/T$. Наблюдая за затухающими колебаниями через зрительную трубу, легко определить как их период $T = 2\pi/\omega$, так и постоянную времени $\tau = \delta^{-1}$ (согласно (2), эта постоянная равна отрезку времени, за который амплитуда $A(t)$ спадает в $e \approx 2,72 \dots$ раза). Пример получающегося графика $A(t)$ приведен на рис. 2; здесь $T = 56,3$ с, $\tau = 7,8T$, $Q = 24,5$.

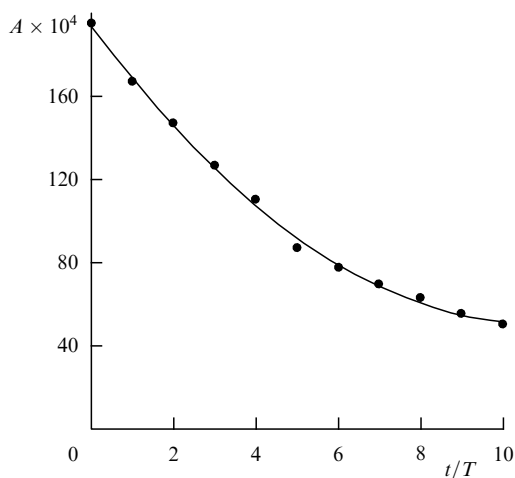


Рис. 2. График $A_G(t)$ в режиме затухающих свободных колебаний (эксперимент).

Основной же эксперимент, как ясно из сказанного выше, заключается в наблюдении и регистрации процесса резонансной раскачки вынужденных колебаний крутильного маятника периодической манипуляцией положением притягивающих грузов M . Хотя это и не является обязательным, в нашей установке последние, как и грузы m самого маятника, сделаны не сферическими, как обычно, а выполнены в виде коротких цилиндров с плоскими торцами, иными словами, — в виде сравнительно толстых дисков или шайб радиусом R и толщиной $H = R = 4$ см (для груза m соответственно $h = r = 2$ см (см. рис. 1)). Это несколько усложняет выражение для силы притяжения между грузами M и m при их близком расположении относительно друг друга,

поскольку известная формула Ньютона $F_G = GMmr_c^{-2}$, где r_c — расстояние между центрами грузов, теперь не справедлива. Однако такие формы позволяют повысить значение чувствительности системы вследствие того, что при заданных значениях масс M и m и определяемого конструкцией установки минимального расстояния d между их поверхностями сила гравитационного притяжения F_G увеличивается (в нашем случае в 1,5 раза, см. ниже). Имеются и другие преимущества такой формы грузов: при $d \ll R$ во всем диапазоне вариаций $\Theta(t)$ сила F_G остается с большой точностью постоянной, к тому же грузы цилиндрической формы проще в изготовлении, чем строго шарообразные.

Чтобы грузы M можно было перемещать без участия рук экспериментатора, они располагаются на специальных легких направляющих пластинах-дорожках 7 (см. рис. 1), которые с помощью электромеханического устройства (включаемого соответствующим переключателем, не указанным на рисунке) меняют свой наклон так, что грузы M одновременно и в противофазе перекачиваются из одного положения в другое и оказываются рядом то с одним из грузов m , то с другим. Время перекачивания в нашей установке составляет около 2 с, что более чем на порядок меньше периода собственно колебаний T , еще несколько секунд занимает подъем соответствующего груза перед началом скатывания. Наиболее эффективная раскачка колебаний, очевидно, будет происходить в том случае, если половину периода груз M притягивает маятник в одну сторону, другую половину — в противоположную. При этом переключение положения этих грузов нужно совершать с таким расчетом, чтобы колебания каждый раз начинались из наиболее удаленного положения груза m по отношению к оказавшемуся рядом притягивающему грузу M . График $M_G(t)$ при этом близок к меандру (рис. 3); амплитуда колебаний $A_G(t)$ тогда будет монотонно нарастать и за время $t \geq \tau = \delta^{-1}$ достигает максимально установившегося значения A_m . Так, при нулевых начальных условиях, очевидно, зависимость $A_G(t)$ будет

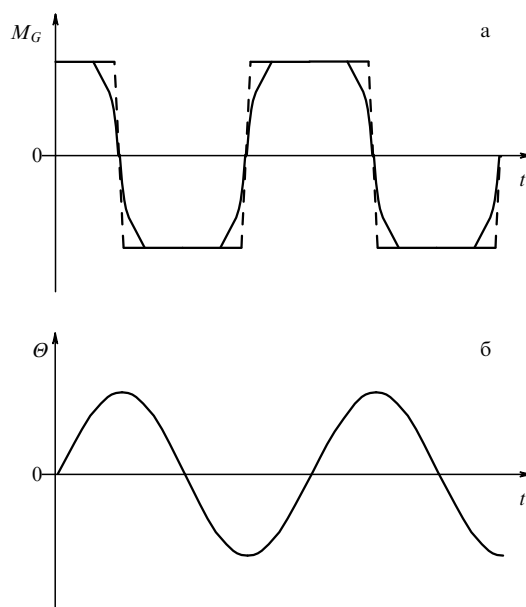


Рис. 3. Графики изменения момента силы $M_G(t)$ (а) и осциллограммы колебаний (б) в режиме резонансной раскачки.

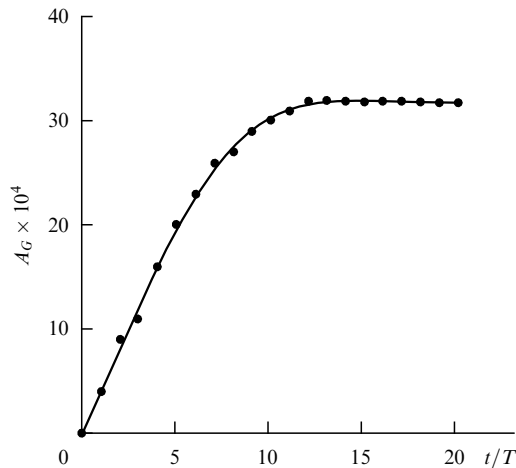


Рис. 4. График $A_G(t)$ в режиме резонансной раскачки (эксперимент).

иметь вид [2]

$$A_G(t) = A_m [1 - \exp(-\delta t)]. \quad (3)$$

Значение гравитационной постоянной G легко выражается через величину A_m (см. ниже), которая может быть либо измерена непосредственно (если время наблюдений $t \geq \tau$), либо пересчитана по формуле (3) через ранее измеренные значения $A_G(t)$ и при найденном предварительно коэффициенте затухания $\delta = \tau^{-1}$. Пример реально получающегося в экспериментах графика $A_G(t)$ приведен на рис. 4. Заметим, что амплитуда установившихся колебаний A_m здесь составляет около $3,2 \times 10^{-3}$ рад, что примерно в $Q = 24,5$ раза больше, чем статический отклик на такую же по величине силу F_a , фиксация которого на данной установке была бы на пределе ошибок измерений.

3. Вычисление гравитационной постоянной

Нахождение значения G по измеренной амплитуде вынужденных колебаний A_m наиболее просто из энергетических соображений для случая, когда зависимость момента сил $M_G(t)$ в уравнении (1) можно аппроксимировать в виде меандра, т.е. $M_G = \pm M_0$ в зависимости от полупериода (см. рис. 3). При оптимальной фазировке перемещений грузов M (см. выше) в течение одного полупериода, когда маятник поворачивается на угол $2A$ за счет работы силы F_G , энергия колебаний возрастает на величину

$$\Delta W = 2M_G A, \quad (4)$$

где $M_G = 2IF_G$. За то же время относительные потери энергии из-за диссипации равны (см. [2])

$$\frac{|\Delta W|}{W} = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega}, \quad (5)$$

где запасенная энергия колебаний связана с амплитудой A соотношением $W = (1/2)DA^2 = (1/2)I\omega^2 A^2$. Из условия баланса энергии в установившемся режиме тогда следует (с учетом $I = 2ml^2$)

$$F_G = \frac{\pi}{2} m l \omega \delta A_m. \quad (6)$$

С другой стороны, сила гравитационного притяжения между грузами M и m может быть записана в виде

$$F_G = kG \frac{Mm}{r_c^2}, \quad (7)$$

где r_c — расстояние между центрами дисков, а коэффициент k (формфактор) учитывает отличие формы грузов от сферической и зависит от r_c (при $H \ll r_c$ $k \rightarrow 1$). Непосредственный численный расчет на основе закона тяготения Ньютона между точечными массами для параметров нашей установки ($H = R = 4$ см, $h = r = 2$ см, $d = 1,2$ см, $r_c = 4,2$ см) дает $k = 0,66$; кстати, значение F_G при этом оказывается всего около $1,6 \times 10^{-8}$ Н. Заметим, что, хотя здесь $k < 1$, использование цилиндрических грузов дает выигрыш по сравнению со сферическими телами с теми же массами M и m , поскольку позволяет уменьшить расстояние r_c между центрами масс. В самом деле, в последнем случае, как следует из равенства объемов, эти грузы имели бы радиусы соответственно $R_1 \approx 0,91R$, $r_1 \approx 0,91r$, и при том же технологическом зазоре $d = 1,2$ см значение r_c оказалось бы равным $r_{c1} = R_1 + r_1 + d \approx 6,6$ см, а сила притяжения, как уже указывалось выше, меньше (конкретно, в наших условиях в 1,6 раза). В результате, приравнивая (6) и (7), получаем окончательное выражение для вычисления гравитационной постоянной по данным эксперимента:

$$G = \frac{\pi \delta \omega l r_c^2}{2km} A_m. \quad (8)$$

Так, подстановка A_m и ω из приведенных на рис. 3 графиков дает значение $G = 6,6 \times 10^{-8}$ см³ г⁻¹ с⁻¹, т.е. ошибка в данном случае оказывается менее 3%. В среднем же при проведении измерений, не имеющими специальных навыков студентами, точность определения G составляет не хуже 10–15%.

Погрешность вычисления G прежде всего складывается из случайных ошибок экспериментального определения величин ω , δ и A_m , фигурирующих в формуле (8). При этом ошибка в измерении значения ω , как обычно для приборов с индикацией с помощью светового пятна, определяется соотношением между шириной этого пятна и ценой деления индикаторной шкалы. С учетом того, что значение T находится по моментам прохождения маятником нулевых положений в течение многих (десятка и более) периодов, эта ошибка не превышает 1%. Ошибка же измерения амплитуды A_m оказывается больше по той причине, что последняя фиксируется в моменты максимальных отклонений маятника, где угловая скорость колебаний мала; предельная ошибка в нашей установке около 6%, но путем статистического усреднения по нескольким измерениям ее можно уменьшить примерно вдвое. Такого же порядка оказывается и ошибка определения коэффициента затухания δ , поскольку она связана с разбросом измеряемых значений $A_G(t)$. Что касается дополнительных ошибок, обусловленных отличием реальной зависимости $M_G(t)$ от меандра и неточностью фиксации моментов достижения маятником крайних положений, когда происходит переключение реле, управляющего положением грузов M , то они оказываются незначительными (не превышает 1%) по той причине, что в этих положениях угловая

скорость маятника мала и вклад указанных факторов в энергетическом соотношении (4) также мал. Примерно такого же порядка ошибка набегает из-за геометрических факторов — неточности задания значений l , H , R и момента инерции маятника.

4. Заключение

Что касается использования описанной установки в студенческом практикуме, то методически подобная работа более уместна в разделе "Колебания и волны", т.е. на II курсе, когда изучаются закономерности свободных и вынужденных колебаний осцилляторов различной природы (так мы и поступили в Нижегородском университете), хотя университетские программы по общей физике предусматривают рассмотрение гравитационных сил уже на I курсе. Кстати, содержание заданий при этом можно разнообразить, например, раскраску вынужденных колебаний "включать" не с нулевых начальных условий, а после произвольного начального толчка, в

том числе и превышающего амплитуду установившихся колебаний (это позволяет несколько уменьшить среднеквадратичную ошибку определения значений A_G и G). Нам кажется, что подобная лабораторная работа, не содержащая особо сложных узлов, может быть воспроизведена и успешно внедрена и в других вузах. Более того, благодаря достаточной компактности после некоторой модификации она вполне может быть использована и для лекционных опытов по демонстрации гравитационных сил.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ ведущих научных школ № 0015-96741 и Федеральной целевой программы № А0047/0570 "Нижегородский объединенный УНЦ Университета и институтов РАН".

Список литературы

1. Kestenbaum D *Science* **282** 2180 (1998)
2. Горелик Г С *Колебания и волны* (М.: Физматгиз, 1959)

University laboratory measurement of the gravitational constant

N.S. Stepanov, A.V. Shisharin

*N.I. Lobachevskii Nizhniĭ Novgorod State University,
prosp. Gagarina 23, 603600 Nizhniĭ Novgorod, Russian Federation
Tel. (7-8312) 65-81 73. Fax (7-8312) 65-64 16
E-mail: stepanov@rf.unn.runnet.ru*

An apparatus for measuring the gravitational constant under the conditions of university laboratory exercises is described. The apparatus consists of a torsion pendulum which in the course of an experiment swings under the action of gravitational forces from additional masses whose positions are made to change periodically in phase with pendulum oscillations by means of a special device. The gravitational constant is calculated from the amplitude of steady-state oscillation. The experimental and calculation procedure is discussed, and measurement errors estimated.

PACS numbers: 01.50.Pa, 04.80.Cc, 06.20.Jr

Bibliography — 2 references

Received 17 July 2001, revised 13 September 2001