Трибуна УФН № 6р
опубликовано онлайн 08.12.2018

Л. Г. Антипенко
Институт философии РАН, Москва, Российская Федерация

К вопросу о двуспинорной интерпретации решения квантово-релятивистского уравнения Дирака, описывающего свободное движение электрона

Аннотация

В данной заметке представлен анализ решения квантово-релятивистского уравнения Дирака, описывающего свободное движение электрона. Показано, что результат решения и его интерпретация, предложенная самим Дираком, дают неполную картину движения частицы. Неполнота связана с заменой четырёхмерных матриц в структуре решения двухмерными матрицами Паули. Предлагается способ полного решения под углом зрения комплементарной логики [1]. При полном решении описание движения электрона включает в себя композицию положительного и отрицательного значений (собственной) массы частицы вместе с композицией положительного и отрицательного параметров времени.

Ключевые слова: уравнение Дирака, спиноры, спинорное представление времени и (собственной) массы электрона.

Предлагаемую мною методическую заметку можно было бы отнести к разделу истории физики, если бы она не касалась современных открытий в области квантового времени, известных под названием «Квантовые кристаллы времени» [2]. Связь результатов решения дираковского уравнения с квантовыми кристаллами времени усматривается в том, что при его двуспинорной интерпретации описание движения электрона требует учёта двух производных по времени, со знаком плюс и со знаком минус. Эти производные ставятся в один ряд с другими квантовыми операторами, действующими на волновую функцию. При этом возникает задача определиться с линейными и нелинейными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Использование линейных операторов обусловлено принципом суперпозиции квантовых состояний движения. (Для выполнения принципа суперпозиции необходимо, чтобы уравнения, которым удовлетворяют волновые функции, были линейными). Однако квантовая механика оперирует и нелинейными операторами. К их числу относится антиунитарный (нелинейный) оператор обращения времени. При двуспинорной интерпретации требуется учитывать взаимоотношение между линейными и нелинейными операторами.

Воспроизведём коротко последовательность тех шагов, которые предпринял Дирак при составлении своего уравнения, его решении и интерпретации [3, с. 349−356].
Поставлена задача преобразования уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \qquad (1)$$

таким образом, чтобы оно приобрело релятивистски инвариантную форму. Для этого гамильтониан H соотносится с релятивистким выражением энергии движущейся частицы в выражении

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \qquad (2)$$

В результате имеем:

$$\{p_0 - (m^2c^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2)^{\frac{1}{2}}\}\psi = 0\,, \qquad (3)$$

где p_0 обозначает $\dfrac{\partial}{\partial x_0}$ ($x_0 = t$), а $p_1 = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$, $p_2 = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial y}$, $p_3 = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial z}$.

В полученном таким образом уравнении (3) везде стоят операторы, и всё выражение, стоящее перед волновой функцией ψ, рассматривается в целом как оператор. Но это уравнение неудовлетворительно по нескольким причинам, на которые указывает Дирак. Поэтому предлагается умножить его слева на оператор $\{p_0 + (m^2c^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 p_3{}^2)^{\frac{1}{2}}\}$, в результате чего образуется релятивистски инвариантное уравнение

$$\{p_0{}^2 - m^2c^2 - p_1{}^2 - p_2{}^2 - p_3{}^2\}\psi = 0\,. \qquad (4)$$

Однако, отмечает Дирак, оно не вполне эквивалентно уравнению (3), потому что хотя каждое решение (3) есть решение (4), но обратное неверно. «Только те решения (4), которые соответствуют положительным значениям p_0, являются решениями (3)» [3, с. 352]. Заметим от себя, что оператор $p_0{}^2$ свидетельствует о том, что может быть дополнительное решение (4), соответствующее отрицательному значению p_0, но этот оператор нелинейный, поэтому в те времена было непонятно, как с ним в данном случае обращаться. Дирак в связи с этим пишет, что вид волнового уравнения (4) не вполне согласуется с общими положениями квантовой механики, поскольку оно квадратично относительно *t* вместо того, чтобы быть линейным по отношению к $\dfrac{\partial}{\partial t}$ или p_0 [3 с. 352].

Выход из затруднения, предложенный автором, заключается в том, чтобы найти лоренц-инвариантную форму представления уравнения (4) и вместе с тем линейную относительно всех четырёх операторов p_0, p_1, p_2, p_3. Дирак выписывает следующее основополагающее уравнение для дальнейших поисков:

$$\{p_0 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta\}\psi = 0\,, \qquad (5)$$

где α и β не зависят от p и предстают как четырёхмерные матрицы, которые позволяют наделить электрон новой степенью свободы − спином. При этом требовалось преобразовать его таким образом, чтобы оно удовлетворяло критерию инвариантности. Для этого Дирак умножил его слева на оператор $\{p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta\}$. Тем самым было получено выражение, совпадающее с (4) при условии, что коэффициенты α_1, α_2, α_3 и оператор β подчиняются следующим требованиям:

$$\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_b = 2\delta_{ab},\ (a, b{=}1,2,3);\ \beta = \alpha_m mc\,,$$

где

$$\alpha_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Однако в этом месте Дираком была допущена ошибка, повлекшая за собой цепь других ошибочных предположений. Дело в том, что само по себе уравнение (5) не эквивалентно (4) и, следовательно, не является релятивистски инвариантным. Дирак же утверждает, что придавая величинам α и β подходящие свойства, можно сделать уравнение (5) эквивалентным (4), по крайней мере, постольку, поскольку дело касается движения электрона как целого. Мы можем теперь, пишет он, предположить, что уравнение (5) «есть правильное релятивистское волновое уравнение для движения электрона в отсутствие поля» [3, с. 353]. В то же делает оговорку, что здесь имеется трудность, вызванная тем фактом, что уравнение (5), по аналогии с (4), не является в точности эквивалентным уравнению (3), «но допускает также и решения, соответствующие отрицательным значениям p_0, а не только положительным» [3, с.353]. И добавляет: «Первые, разумеется, не соответствуют какому-либо действительно наблюдаемому движению электрона» [3, с. 353].

Ошибка Дирака состоит в том, что отбрасывая решение с отрицательным значением p_0 как непригодное для физики, он не замечает того, что в уравнении (3) оператор m^2c^2 обязывает принимать два численных значения массы электрона: $+m$ и $-m$. Отсюда вполне естественная установка на то, чтобы согласовать положительное и отрицательное значения p_0 с положительным и отрицательным значениями m. На это обстоятельство обратил внимание Р Пенроуз [4, 519−528]. Он указал, что частица, описываемая уравнением Дирака, имеет всего две компоненты спина, несмотря на то, что у волновой функции четыре компоненты. Дирак зачислил две из них, соответствующие отрицательной массе частицы, на счёт позитрона. «Однако было бы заблуждением считать, − пишет Пенроуз, − что две компоненты уравнения Дирака относятся к электрону, а две другие − к позитрону…» [4, с.526].

Этого замечания Пенроуза для нас достаточно, чтобы оставить в стороне «дырочную» теорию Дирака, как не оправдавшую себя, и заняться непосредственно вопросом о смысле положительной и отрицательной массы электрона. Начнём с указания на то, что когда мы входим в область квантово-механического описания физических явлений, мы привносим туда классическое (в смысле: аналитическое) представление времени. Кроме того, решая квантово-релятивистское уравнение Дирака, мы можем предположить, что величина массы электрона m есть средняя масса частицы. Эти предположения правдоподобны в той же мере, в какой принято считать наблюдаемую скорость движения электрона *средней* скоростью, поскольку она всегда меньше скорости распространения света *c*, хотя в уравнении Дирака значится только скорость *c*.

Дирак по этому поводу пишет следующее: «Поскольку электроны, наблюдаемые на практике, имеют скорости существенно меньшие скорости света, то может показаться, что мы имеем здесь противоречие с экспериментом. Это, однако, не является действительным противоречием, поскольку теоретическая скорость в вышеприведенном заключении есть скорость в определённый момент времени, тогда как наблюдаемые скорости всегда являются средними скоростями по некоторому конечному интервалу времени» [3, с. 361]. В дальнейшем, добавляет он, при рассмотрении уравнений движения будет показано, что скорость вообще не является постоянной, но быстро осциллирует вокруг среднего значения, которое согласуется с наблюдаемой величиной [3, с.361].

Этими разъяснениями указанное Дираком противоречие не разрешается, так как он апеллирует к средне-арифметической (по времени) скорости, а в квантовой механике средние величины суть величины средне-вероятностные. Поэтому если частица движется, скажем, из точки *A* в точку *B* со скоростью $v < c$, а теоретически ей приписывается скорость *c*, то это означает, что затрата времени на её передвижение из *A* в *B* соответственно меньше той затраты, которая требуется для преодоления расстояния между *A* в *B* световым сигналом.

Теория относительности устанавливает определённый порядок между кинематическими и динамическими величинами. В порядке этих взаимоотношений собственная масса частицы («масса покоя») является величиной инвариантной, но при том условии, что и время *неизменно* подчиняется правилам лоренцевых преобразований, затрагивающих временную длительность, пространственную протяжённость, энергию, импульс и т.д. Однако в релятивистской квантовой механике темпоральная характеристика процессов претерпевает изменение, поскольку в структуре времени открываются переходы от it к $-it$ и обратно, о чём можно судить по наличию двух операторов $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ и $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, действующих на волновую функцию. Мы говорим «в структуре времени», имея в виду, что она раскрывается посредством той пробной, фундаментально-элементарной, частицы, каковой является электрон.

От амплитуд вероятности, присущих положительной и отрицательной компоненте времени, зависит направление и скорость его течения. Но от этих же амплитуд зависит, соответственно, и величина собственной массы частицы.

В заключение уточним используемое в данной заметке понятие спинора в том отношении, как оно подключается к описанию движения электрона. Спинором (от англ. spin − вращаться) называется математическая конструкция, характеризующаяся особым законом преобразования при переходе от одной системы координат к другой. Спиноры первой валентности задаются двумя комплексными числами, которые при повороте системы координат трёхмерного евклидова пространства на угол 2π, возвращающем её в исходное состояние, меняют знак (плюс на минус, минус на плюс). Компонентами *квантового* спинора служат две волновые функции. Знаки их при аналогичном преобразовании меняются под воздействием двухмерных матриц Паули (подробнее см. в книге Пенроуза [4, с. 189, 467]). При этом переход от функции ψ к функции комплексно сопряжённой $\psi*$ есть переход от спинора к антиспинору. Двуспинорная интерпретация означает сочетание спинора и антиспинора в системе описания одной и той же частицы. У Дирака она распадается на описание электрона и позитрона [3, с. 376−379].

Его позиция в данном вопросе зависит от принятых им определений спиноров, располагаемых в обычном трёхмерном евкдидовом пространстве и пространстве гильбертовом [5]. Спиноры, как и тензоры, пишет Дирак, суть геометрические объекты в нашем пространстве, компоненты которых преобразуются линейно при преобразовании пространственных координат. От тензоров они отличаются тем, что меняют знак при полном обороте вокруг любой оси (тензоры при этом не меняются). Таким образом, знак спиноров всегда можно выбирать произвольно [5, с. 9]. Далее идёт существенная для позиции Дирака оговорка, что хотя спиноры могут существовать в *действительном* (курсив наш. − Л. А.) евклидовом пространстве с любым числом измерений (большим единицы), но они могут существовать и в других пространствах, в которых имеет смысл понятие перпендикулярности. Важный пример − физическое пространство Минковского. Однако наличие в нём одного лишнего измерения по сравнению с трёхмерным евклидовым пространством − измерение времени − для спиноров не имеет большого значения. «Всё определяется лишь теми измерениями, которые обладают обычной перпендикулярностью евклидова пространства» [5, с.9].

С этим утверждением нельзя согласиться, так как измерение времени существенно меняет структуру евклидова пространства. У Дирака нет ответа на вопрос о том, как быть со спинором, скажем, в не-евклидовом пространстве Лобачевского, ведь в нём фигурируют линейные ряды вещественных и мнимых точек. Однако при рассмотрении структуры гильбертова пространства он налагает на неё атрибут аналитичности, что ставит её в один ряд с действительной, или вещественной, структурой евклидова пространства.

Более конкретно суждения автора о гильбертовом пространстве выглядят так. Под «гильбертовым пространством», пишет он, мы будем понимать то, что математики называют сепарабельным гильбертовым пространством. Это − пространство векторов, каждому из которых соответствует счётное число координат $q_1, q_2, q_3...$ и каждому вектору приписывают квадрат дины, равный $\sum_r |q_r|^2$. Величины q_r можно считать координатами вектора в гильбертовом пространстве лишь при том условии, что ряд квадрата длины сходится. И далее: «Если представить координату q_r в виде суммы действительной и мнимой частей: $q_r = x_r + iy_r$, то квадрат вектора длины будет равен

$\sum_r (x_r{}^2 + y_r{}^2)$. Величины x_r и y_r можно рассматривать как координаты нового вектора. Это тоже вектор гильбертова пространства, но уже действительный вектор, т.е. вектор с действительными координатами.

Таким образом, в гильбертовом пространстве комплексным вектором определяется действительный вектор» [5, с.7]. После этого идёт пояснение, что хотя второму вектору соответствует, на первый взгляд, вдвое большее число координат, чем первому, но удвоенная счётная бесконечность остаётся счётной бесконечностью, так что в действительности второй вектор содержит точно такое же число координат, как первый. «Стало быть, в гильбертовом пространстве комплексный вектор не является более общим вектором, нежели действительный вектор» [5, с.7].

Здесь, как видно (во всяком случае, так видится мне), Дирак допустил две ошибки. Во-первых, при определении гильбертова пространства он говорит о счётном числе координат. А далее, когда сравнивает и отождествляет количество координат действительных и количество координат комплексных, счётное число он подменяет числом счётно бесконечным. Понятно, что в случае конечных чисел количество одних и других координат будет разным. А вторая ошибка заключается в том, что нет никаких оснований, при операциях в гильбертовом пространстве, исключать операцию перехода от комплексного числа $z = x + iy$ к комплексно сопряженному числу $\bar{z} = x - iy$. (В самом деле, нельзя же полагать, будто, скажем, антиунитарный оператор обращения времени действует не в гильбертовом пространстве, а где-то вне его!). Всё это означает, что нет и никаких оснований исключать переход, в одном и том же квантовом процессе, от спинора к антиспинору.

Список литературы

1. Антипенко Л. Г. К вопросу о формировании комплементарной логики // Электронный философский журнал Vox, № 23, декабрь 2017. URL: https://vox-journal.org/html/issues/408/419
2. Wilczek F. Quantum Time Crystals / arXiv: 12022537.
3. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики (пер. с 4-го англ. издания Ю. Н. Демкова и Г. Ф. Друкарёва под ред. и с предисловием акад. В. А. Фока). М.: Физматгиз, 1960. − 434 с.
4. Пенроуз, Роджер. Путь к реальности или законы, управляющие Вселенной. Москва − Ижевск, 2007. − 912 с.
5. Дирак П. Спиноры в гильбертовом пространстве (пер. с англ. А. М. Переломова). М.: «Мир», 1978. − 126 с.