

# Методы анализа и синтеза оптических систем в первой, второй и третьей главах первого тома "Dioptricae" Л. Эйлера

Р. Е. Ильинский

17 января 2013 г.

## Аннотация

Целью данной статьи является изучение методов анализа и синтеза оптических систем, которые изложены в первой, второй и третьей главах первого тома "Dioptricae" Л. Эйлера. В статье приведено краткое содержание большинства параграфов этих глав. Задачу о расчете системы тонких линз, каждая из линз которой рассчитана на минимум сферической аберрации, предлагается назвать задачей Эйлера.

## 1 Введение

В 2013 году исполняется 230 лет со дня смерти Леонарда Эйлера (Leonhard Euler; 1707-1783). А в 2014 году исполняется 290 лет со дня основания Российской академии наук, с которой на протяжении свыше полувека была связана деятельность Леонарда Эйлера.

В литературном наследии Л. Эйлера насчитывается около 60 мемуаров по вопросам оптики. Эти работы тянутся непрерывной чередой от первого петербургского периода до конца жизни Эйлера, охватывая почти полвека; они с полной ясностью отражают состояние оптики своего времени с ее практическими успехами и, вместе с тем, с не доведенными до конца теоретическими выводами [1]. В знаменитых "Письмах ..." [2] Эйлер часто обращается к описанию механизма зрения и устройства человеческого глаза (письма 36-40, 41-44, 99-100), а письма 187-223 представляют собой популярное изложение теории оптических систем.

Три тома "Dioptricae" [3, 4, 5] являются наиболее объемным трудом Л. Эйлера по геометрической оптике и теории оптических инструментов. "Dioptricae" написана на латинском языке и была опубликована во время второго Петербургского периода жизни Л. Эйлера, когда Л. Эйлер практически ослеп [6].

Через полтора месяца после кончины Л. Эйлера его ближайший ученик и помощник академик Н. Фус сказал о "Dioptricae" следующее [7]

Прибытие в Санктпетербург академика Крафта в состоянии Эйлера привело произвести в действо предприятие, о котором он давно размышлял, а именно соединить в одно сочинение все, что в течение тридцати лет ни изобретено для приведения в большее совершенство зрительных труб и их теории. С обыкновенною неутомимостию приступил он к исполнению намерения и в 1769, 1770 и 1771 годах издал Диоптрику, в трех томах состоящую.

Первая часть содержит в себе общую сей новой науки теорию. Ибо Эйлер привел оную в нынешнее состояние, а до сего времени едва наукою ее назвать было можно. По причине длины труб, какие прежде изобретения сложных предметных стекол употребляемы были, и не ясности изображаемых ими предметов астрономы принуждены были почти совсем оные оставить и довольствоваться зеркальными телескопами. Вычисление для тех и других выгоднейшего сложения было настоящий хаос; и хотя задача сия собственно принадлежит к начальной и простой геометрии весьма малого знания требует дифференциального счета, однако в решении оной весьма многого недоставало, так что успехи в сей науке должно считать с того времени, когда Эйлер начал оною заниматься.

Вторая и третья часть содержит в себе правила, как наилучшим образом составлять катоптрические телескопы и микроскопы. Исчисление неясности, происходящей от сферического вида стекол, есть превосходный образец тончайшей алгебры, и по справедливости удивляться должно искусству в приемах, которыми он умел во всех оптических орудиях соединить ясность в изображении, наибольшее поле зрения и сокращение труб для всех возможных увеличиваний, сколько бы глазных стекол употребить на благо ни рассудилося; одним словом, все роды оптических орудий исследованы и вычислены с бепримерною простотою.

Хотя Н. Фус допустил преувеличения (простительные для "Похвальной речи", которая посвящена памяти недавно умершего человека), тем не менее публикация "Dioptricae" стало заметным событием в истории прикладной оптики. В конце XVIII – начале XIX вв. были очень популярны сделанные Г. С. Ключегелем [8] из "Dioptricae" Эйлера извлечения, имеющие практическое значение. В работе [9] показано, что при расчетах объективов астрономических телескопов К. Ф. Гауссом были использованы методы, которые изложены в [3, 4, 5, 8]. Также К. Ф. Гаусс ссылается на труды Эйлера по расчету оптических систем в своей статье [10], которая посвящена расчету двухлинзового ахроматического объектива. К началу XX века "Dioptricae" изрядно устарела. Поэтому "Dioptricae" уделено очень мало внимания в широко известной книге [11] по истории оптики. Специфический математический аппарат, малое число иллюстраций и сугубо специальные вопросы теории оптических инструментов делают "Dioptricae" труднодоступной для исследователей с гуманитарным образованием. А латинский язык, на котором написаны все три тома "Dioptricae", затрудняет изучение этой работы Эйлера исследователям с физико-математическим и инженерно-техническим образованием. Обычно при изучении работ Эйлера по прикладной оптике основное внимание уделяется работам, которые опубликованы на французском языке [12]. На русском языке краткие сведения о "Dioptricae" можно найти в работах [13, 14]. Особого внимания заслуживает работа [15] выдающегося российского конструктора оптических систем Г. Г. Слюсарева.

Каждый том "Dioptricae" разделен на главы, а каждая глава разделена на параграфы. Наиболее часто эти параграфы имеют следующие названия: Definitio (Определение), Scholion (Пояснение), Problema (Задача), Solutio (Решение), Demonstratio (Пример), Lemma (Предпосылка), Corollarium (Следствие<sup>1</sup>). В пределах одного тома нумерация параграфов сплошная<sup>2</sup>. Нумерация формул в "Dioptricae" отсутствует. Поэтому нумерация формул в настоящей статье никак не связана с оригинальным изданием "Dioptricae".

В настоящей статье рассматриваются только первая, вторая и третья главы "Dioptricae", где в общем виде изложены методы анализа свойств линзовых систем в параксиальном приближении, а также рассмотрены задачи синтеза линзовых объективов с разной степенью

---

<sup>1</sup>Corollarium в буквальном смысле означает венок, в переносном — следствие, прибавок, добавление

<sup>2</sup>Обычно параграф с названием Solutio следует непосредственно после параграфа Problema. Чаще всего параграф с названием Solutio собственного номера не имеет

коррекции сферической аберрации третьего порядка. В последующих четвертой и пятой главах "Dioptricae" исследуется работа оптической системы совместно с глазом. Шестая глава посвящена хроматическим аберрациям<sup>3</sup>. В последней (седьмой) главе первого тома "Dioptricae" речь идет об общих принципах конструирования зрительных труб и микроскопов.

## 2 Содержание первой главы

Первая глава первого тома "Dioptricae" называется "De diffusione imaginis per unicam lentem repraesentatae". Как следует из названия<sup>4</sup>, эта глава посвящена исследованию оптических характеристик одиночной линзы. Обе преломляющие поверхности линзы считаются сферическими, так как (§6)

На практике, конечно, никакая другая форма не может быть придана поверхности линз соответствующим образом и точно, и даже от сферической формы, хотя она больше всего удобна для практики, мастера имеют обыкновение часто отклоняться. Более искусные уже по большей части достаточно благополучно избегают таких изъянов, так что не приходится так уж опасаться, что то, что с помощью расчета получается исходя из гипотезы о сферической форме, не будет соответствовать практике. Поэтому я здесь все время предполагаю, что обе поверхности линз обработаны точнейшим образом согласно сферической форме.

Это положение отличает "Dioptricae" Эйлера от работ по оптике Декарта [16]. Строгая формулировка закона преломления позволила Декарту найти те формы преломляющей поверхности, при которых все лучи, исходящие из единой точки на оси линзы, после прохождения линзы пересекают ось в одной точке<sup>5</sup>. Одним из тех, кто тщательно изучал труды Декарта и пытался по его указаниям изготовить линзы с несферическими преломляющими поверхностями был И. Ньютон. В своих работах по оптике [18] И. Ньютон рассматривает прохождение лучей через несферические преломляющие поверхности и получает несколько важных результатов. Однако до конца XIX века изготовление несферических поверхностей со сколько-нибудь приемлемой точностью оставалось практически недостижимым. И только к концу XX века стало возможным широкое использование оптических элементов с несферическими преломляющими или отражающими поверхностями в оптических приборах. А до этого времени изготовление линз со сферическими преломляющими поверхностями было значительно проще и дешевле. Исследования показали, что отступления от сферической формы преломляющих поверхностей линз телескопов Torricelli, Divini, Campani не очень велики [19]. Трудности в изготовлении несферических преломляющих поверхностей, открытие дисперсии света и обусловленной ей хроматической аберрации были причинами из-за которых И. Ньютон сделал вывод о том, что преимущества линз с несферическими преломляющими поверхностями не очень значительны по сравнению с линзами, в которых преломляющие поверхности сферические. Считая, что дальнейшее улучшение линзовых объективов невозможно из-за хроматических аберраций, И. Ньютон перешел к расчетам и изготовлению зеркальных объективов телескопов [15, 1, 13, 14]. Благодаря такому мнению И. Ньютона работы по конструированию линзовых объективов на несколько десятилетий приостановились. Но ко второй половине XVIII века были найдены способы исправления хроматических аберраций и исследования в области расчетов и проектирования линзовых систем возобновились.

<sup>3</sup>Хроматические аберрации рассматриваются также в Дополнениях I-VIII.

<sup>4</sup>О размытом изображении, которое формирует одиночная линза.

<sup>5</sup>Есть сведения, что аналогичная задача была решена средневековыми арабскими учеными [17]

В §7 Эйлер указывает

...здесь я раз и навсегда указываю, что я апертуру<sup>6</sup> линзы считаю круглой, и что ось линзы проходит через центр апертуры так, что полудиаметр<sup>7</sup> этой апертуры в то же время представляет размер апертуры.

В прикладной оптике при анализе свойств вращательно-симметричной оптической системы широко используется параксиальное приближение. Параксиальное приближение предполагает, что траектории лучей проходят бесконечно близко к оси оптической системы – в параксиальной области. Если траектория луча принадлежит параксиальной области, то такой луч называется параксиальным. Законы, которые получены в параксиальном приближении, для положений и величин изображений и предметов очень просты и могут быть использованы в качестве приближенных за пределами параксиальной области [20, 21, 22]. Термина "параксиальный" в "Dioptricae" Эйлера нет. Но фактически параксиальное приближение используется когда величины апертур преломляющих поверхностей линз считаются малыми и траектории лучей расположены на малом расстоянии от оптической оси. Для краткости изложения, и для того, чтобы сделать материал "Dioptricae" более понятным современному читателю, в настоящей статье будет использован термин "параксиальный". Параксиальному изображению в "Dioptricae" соответствует термин главное изображение (§1). Основной закон параксиального приближения в "Dioptricae" сформулирован в §3

И если следовательно апертура линзы маленькая, то отдельные точки любого предмета после преломления воссоздаются отдельными точками и таким образом главное изображение будет надлежащим образом разделенным и обойдется без неправильности (confusionem): так как неправильность только тогда происходит, когда лучи, испущенные из одной точки, не собираются снова в одну точку.

Очень важное свойство параксиальной области изложено в §4

И пока апертура линзы  $aAa$  маленькая, нет никакой разницы, в какой форме обработаны поверхности линзы. Ведь какова бы ни была форма поверхности, так как в расчет попадает настолько маленький кусочек поверхности, что всегда может рассматриваться как сфера.

Эйлер не приводит доказательства этого утверждения, но такое доказательство есть в книге [23, часть первая, предложение XXX].

В §6 Эйлер замечает, что в элементарных пособиях достаточно полно исследованы свойства оптических систем в параксиальном приближении. Поэтому в "Dioptricae" Эйлер (§6)

...решил лучше рассмотреть то отношение преломления, когда апертуры линз умеренного размера ...

В §8 дано следующее определение

Крайнее изображение есть то, которое создают прошедшие через край апертуры лучи.

---

<sup>6</sup>Для обозначения световых габаритов преломляющих поверхностей в "Dioptricae" используется слово "apertura", которое буквально означает "отверстие".

<sup>7</sup>Для указания величин световых габаритов круглых отверстий в "Dioptricae" используется слово semidiameter. Слово semidiameter буквально означает "половина диаметра". Хотя половина диаметра окружности эквивалентна радиусу, но в "Dioptricae" слово радиус (radius) используется как характеристика кривизны преломляющих поверхностей. Чтобы сохранить это различие при переводе, слово semidiameter переводилась как полудиаметр.

Если точка расположена на оси, то те лучи, которые исходят из этой точки и проходят через край апертуры линзы, после прохождения линзы снова соберутся в одну точку на оси (§9). Если точка расположена вне оси, то те лучи, которые исходят из этой точки и проходят через край апертуры линзы, после прохождения линзы не соберутся в одну точку (§10). При этом крайнее изображение будет тем более неправильным, чем дальше точка удалена от оси. В §11 указано, что изучение изображения точки, которая не лежит на оптической оси,

есть вопрос не только очень трудный, но и так вовлечен в обильные вычисления, что вследствие этого едва могут быть сделаны какие-то выводы.

Далее в §11 "Dioptricae" утверждается, что на практике

...обычно никогда не разглядываются предметы слишком отдаленные от оси линзы, и следует быть довольными, если только предметы, расположенные на самой оси линзы, отображались четко;...

Кроме того, Эйлер считает, что качество изображения для точки немного смещенной с оптической оси не отличается сильно от изображения точки, которая расположена на самой оси. В конце §11 Эйлер пишет, что

...следующие изыскания я распространю только на предметы, расположенные на самой оси линзы.

В §12 отрезок между главным и крайним изображением Эйлер называет *spatium diffusionis*. В настоящей статье *spatium diffusionis* переводится как протяжение рассеяния. Из современной оптической терминологии *spatium diffusionis* может быть сопоставлена продольная сферическая аберрация, которая равна по модулю и противоположны по знаку *spatium diffusionis*. Таким образом, если главное изображение находится в точке  $F$  (рис. 1), а крайнее изображение находится в точке  $f$ , то протяжению рассеяния соответствует отрезок  $Ff$ . Если апертуру линзы разделить на бесконечное число концентрических колец, то лучи, которые проходят через каждое такое кольцо, создают промежуточные изображения. Эти изображения заполняют отрезок  $Ff$  (§14). В §13 утверждается, что протяжение рассеяния монотонно увеличивается при увеличении диаметра апертуры. Это утверждение справедливо, если принимать во внимание только сферическую аберрацию третьего порядка.

В §17 и §18 приведены леммы о представлении функций синус и обратной к ней<sup>8</sup> в виде двух членов степенных рядов:

$$\sin \Phi = \Phi - \frac{1}{6}\Phi^3 \quad (1)$$

$$\arcsin s = s + \frac{1}{6}s^3 \quad (2)$$

После каждой леммы следуют примеры, где для углов  $15^\circ$  и  $30^\circ$  расчеты по формулам (1) и (2) сравниваются с точными значениями. Далее в "Dioptricae" считается, что если угол меньше  $30^\circ$ , то ошибкой при расчетах по формулам (1) и (2) можно пренебречь.

В современной прикладной геометрической оптике [24, 20, 25, 26, 22, 27, 21] очень широко используется так называемое "правило знаков" для углов и отрезков. Считается, что Галлей первым предложил при анализе оптической системы рассматривать длины отрезков и величины углов как положительные и отрицательные числа [28]. В "Dioptricae" нет специального раздела, который посвящен правилу знаков, но правило знаков используется. Правило знаков в "Dioptricae" сходно с тем, которое предложил Галлей, и сильно отличается от тех, что используются в современной геометрической оптике. В "Dioptricae" радиус

<sup>8</sup>Названия арксинус и обозначения  $\arcsin$  в "Dioptricae" нет.

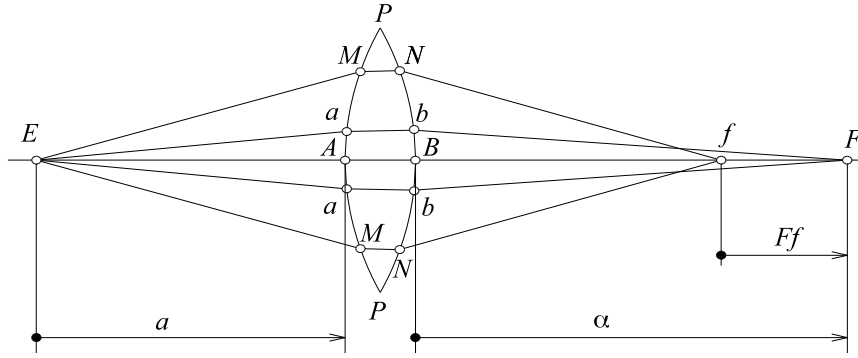


Рис. 1: К определению главного и крайнего изображений. Рисунок из [3] с небольшими изменениями

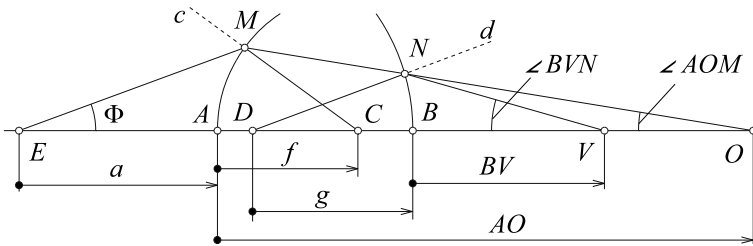


Рис. 2: Ход луча через линзу. Рисунок из [3] с небольшими изменениями

первой (по ходу луча) преломляющей поверхности линзы считается положительным, если поверхность выпуклая, а если первая преломляющая поверхность вогнутая, то ее радиус считается отрицательным. Радиус второй преломляющей поверхности линзы считается положительным, если поверхность выпуклая, а если вторая преломляющая поверхность вогнутая, то ее радиус считается отрицательным. Расстояние от осевой точки предмета до вершины сферической поверхности линзы считается положительным, если из осевой точки на поверхность линзы падает расходящийся пучок лучей. В противном случае расстояние от осевой точки предмета до вершины сферической поверхности линзы считается отрицательным. Расстояние от вершины сферической поверхности линзы до осевой точки изображения считается положительным, если пучок лучей, который идет от сферической поверхности в осевую точку изображения, является сходящимся. В противном случае расстояние от вершины сферической поверхности линзы до осевой точки изображения считается отрицательным. Если передняя (задняя) преломляющая поверхность плоская, то радиус передней (задней) поверхности принимается бесконечно большим (§54). На рис. 2 показан ход луча через линзу. В показанном на этом рисунке случае согласно принятому в "Dioptricae" правилу знаков радиусы  $f$  и  $g$ , расстояния  $AO = a$ ,  $BV$ , углы  $\Phi$ ,  $AOM$ ,  $BVN$  считаются положительными.

Ход луча через первую поверхность линзы рассматривается в §20 следующим образом. Пусть  $E$  – точка пересечения луча с осью,  $C$  – центр сферической преломляющей поверхности,  $M$  – точка пересечения луча со сферической преломляющей поверхностью (рис. 2). По известным значениям сторон  $EC$ ,  $CM$  и углу  $CEM = \Phi$  из треугольника  $\triangle ECM$  находятся угол  $EMC$  и угол падения луча на преломляющую поверхность  $EMc$ . По закону преломления находится угол преломления  $CMO$ . Из треугольника  $\triangle CMO$  находится угол  $COM$  и длина стороны  $CO$ . Метод расчета хода луча в "Dioptricae" весьма близок к тем методам, которые изложены в современных курсах прикладной оптики [22, 26]. Основное отличие состоит в том, что в §20, §21 все промежуточные и конечные выражения представлены в виде рядов по углу  $\Phi$ . В этих рядах отброшены члены от  $\Phi^4$  и выше. В §21 приведены следующие выражения, которые описывают участок траектории луча после преломления на первой поверхности линзы

$$AO = \frac{naf}{(n-1)a-f} - \frac{(n-1)a(a+f)^2(a+(n+1)f)}{2nf((n-1)a-f)^2} \Phi \Phi \quad (3)$$

$$\angle AOM = \frac{(n-1)a-f}{nf} \Phi + \frac{(n-1)(a+f)((n+1)a(a+2f) + (n+1)ff)}{6n^3f^3} \Phi^3 \quad (4)$$

где  $f$  – радиус первой преломляющей поверхности линзы,  $n$  показатель преломления стекла<sup>9</sup>. Точные формулы для расчета хода луча через преломляющую сферическую поверхность приведены в §25.

В §21 утверждается, что если точка пересечения луча с первой поверхностью находится на краю апертуры линзы, то полудиаметр апертуры первой поверхности  $x$  можно приближенно принять равным  $x = a\Phi$ . При этом также можно считать, что  $\Phi = \frac{x}{a}$ . Более точные выражения для  $\Phi$  и  $x$  приведены в §22.

В §26 ставится задача расчета хода луча через вторую поверхность линзы. Эта задача решается аналогично расчету хода луча через переднюю поверхность линзы. На эту аналогию специально указано в §28.

В §30 ставится задача определения точки  $V$  (рис. 2) пересечения луча с осью, в которую луч попадает после прохождения линзы. Решение этой задачи основано на результатах предыдущего рассмотрения хода луча через переднюю и заднюю поверхности линзы. Для вычисления расстояния  $BV$  в §30 приведена следующая формула

$$BV = \frac{nafg - (n-1)adg + dfg}{n(n-1)a(f+g) - nfg - (n-1)^2ad + (n-1)df} - \frac{(n-1)ag^2(a+f)^2(a+(n+1)f)}{2f(n(n-1)a(f+g) - nfg - (n-1)^2ad + (n-1)df)^2} \Phi^2 - \frac{(n-1)(naf - (n-1)ad + df)(naf + (n-1)ag - fg - (n-1)ad + df)^2}{2nf^2g(n(n-1)a(f+g) - nfg - (n-1)^2ad + (n-1)df)^2} \times \times (n^2af + (n^2-1)ag - (n+1)fg - n(n-1)ad + ndf) \Phi^2, \quad (5)$$

где  $g$  – радиус второй поверхности линзы,  $d = AB$  – толщина линзы по оптической оси.

В современной прикладной геометрической оптике при анализе оптической системы вводятся входные координаты луча, которые однозначно определяют начальный участок траектории луча. Например, очень часто в качестве входных координат луча принимаются координаты точек пересечения луча с предметной плоскостью и с плоскостью входного

<sup>9</sup>В "Dioptricae" не используется термин "показатель преломления". Везде используется только "отношение рефракций". Так при переходе из воздуха в стекло отношение рефракций равно  $n : 1$ , а при переходе из стекла в воздух отношение рефракций равно  $1 : n$ . Для краткости в настоящей статье используется термин "показатель преломления"

зрачка [25, 24, 22]. Другие способы определения входных координат луча можно найти в [29, 30]. При расчете хода луча через оптическую систему в параксиальном приближении учитываются только величины первого порядка малости относительно входных координат луча. Более точно определить траекторию луча в оптической системе можно если учитывать величины как первого, так и второго и третьего порядков малости относительно входных координат луча. Различие между траекториями луча, которые рассчитаны при одних и тех же значениях входных координат в параксиальном приближении и с учетом членов первого, второго и третьего порядков малости относительно входных координат луча, соответствуют aberrациям третьего порядка оптической системы. В §§20-30 рассматриваются лучи, которые исходят из одной и той же точки  $E$  на оптической оси; каждый из этих лучей характеризуется углом  $\Phi$ , который в данном случае следует считать входной координатой луча. Поэтому в соотношениях, которые получены в §§20-30, можно выделить две группы слагаемых. Те слагаемые, которые не зависят от  $\Phi$  или зависят от  $\Phi$  линейно, относятся к параксиальному приближению. Остальные слагаемые, которые пропорциональны  $\Phi^2$  и  $\Phi^3$ , соответствуют aberrациям третьего порядка. Поэтому если угол  $\Phi$  стремиться к нулю, то точка  $V$  совмещается с точкой главного (параксиального) изображения (§31). Из формулы (5) следует, что расстояние от вершины второй поверхности линзы до главного (параксиального) изображения равно

$$\alpha = \frac{nafg - (n-1)adg + dfg}{n(n-1)a(f+g) - nfg - (n-1)^2ad + (n-1)df}. \quad (6)$$

Угол  $BVN$  в параксиальном приближении равен (§30)

$$\angle BVN = \frac{n(n-1)a(f+g) - nfg + (n-1)df - (n-1)^2ad}{nfg} \Phi. \quad (7)$$

В §32 – §40 Эйлер ищет наиболее простые и компактные формы записи выражения для вычисления расстояния от вершины второй поверхности линзы до главного (параксиального) изображения  $Bf = \alpha$  (см. рис. 1) и протяжения рассеяния  $Ff$ .

В §41 сформулирована следующая задача

Если даны расстояния до предмета перед линзой  $AE = a$  (рис. 1) и [расстояние до] главного изображения после линзы  $BF = \alpha$  вместе с толщиной линзы  $AB = d$ , определить все линзы [этим условиям] удовлетворяющие, а также для каждой [линзы] протяжение рассеяния  $Ff$ .

В ходе последующего решения этой задачи вводится расстояние  $k$ , такое, что

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{2n}{k+d} \quad \text{и} \quad \frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2n}{k-d}. \quad (8)$$

При заданных значениях  $a$ ,  $\alpha$ ,  $d$ ,  $n$  и выбранном значении  $k$  радиусы преломляющих поверхностей линзы равны

$$f = \frac{(n-1)a(k+d)}{2na+k+d} \quad \text{и} \quad g = \frac{(n-1)\alpha(k-d)}{k-d-2n\alpha} \quad (9)$$

Формула для вычисления протяжения рассеяния в этом случае примет вид

$$Ff = \frac{n\alpha a x x}{2(n-1)^2} \left\{ \left( \frac{k+d}{k-d} \right)^2 \left( \frac{n}{a} + \frac{2}{k+d} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{k+d} \right)^2 + \left( \frac{k-d}{k+d} \right)^2 \left( \frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-d} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k-d} \right)^2 \right\}, \quad (10)$$



где  $x$  – полудиаметр апертуры первой поверхности линзы. Угол между лучом, который проходит через край апертуры первой поверхности линзы, и осью линзы равен

$$\angle BfN = \frac{k-d}{k+d} \cdot \frac{x}{\alpha}. \quad (11)$$

В §42 утверждается

Следовательно, когда даны два расстояния  $AE = a$  и  $BF = \alpha$  вместе с толщиной линзы  $AB = d$ , подходящие линзы можно сделать бесконечными способами, так как для  $k$  можно произвольно брать положительные или отрицательные величины.

В "Dioptricae" расстояние от предмета до линзы вместе с расстоянием от линзы до изображения носят общее название *distantiae determinatrices* (буквально – определяющие расстояния). Расстояние  $k$  в "Dioptricae" носит название *quantitas arbitraria* (буквально – произвольная величина) или *distantia arbitraria* (буквально – произвольное расстояние). Но так как соотношение между радиусами преломляющих поверхностей при одних и тех же положениях предмета и изображения, показателе преломления и толщине линзы определяется  $k$  [см. формулы (9)], то далее в настоящей статье расстояние  $k$  будет носить название "параметр формы линзы".

Сопоставим формулы, которые были получены в "Dioptricae" для одиночной линзы, с аналогичными формулами современной теории aberrаций третьего порядка [24]. Интересно отметить, что как и в "Dioptricae", так и в работе [24], в формулу для расчета сферической aberrации третьего порядка не входят в явном виде радиусы преломляющих поверхностей. Вместо этих радиусов используются углы и высоты параксиального луча, который исходит из осевой точки предмета (так называемый "осевой луч" или "первый вспомогательный луч" по терминологии [24]). Если для углов и высот "осевого луча" (рис. 3) использовать принятое в книге [24] правило знаков, а для радиусов  $f$ ,  $g$  и расстояний  $a$ ,  $\alpha$  сохранить правило знаков, которое принято в "Dioptricae", то

$$f = \frac{n-1}{\check{\alpha}_2 n - \check{\alpha}_1} \check{h}_1 \quad (12)$$

$$g = \frac{n-1}{\check{\alpha}_3 - \check{\alpha}_2 n} \check{h}_2 \quad (13)$$

$$a = -\frac{\check{h}_1}{\alpha_1} \quad \alpha = \frac{\check{h}_2}{\check{\alpha}_3} \quad (14)$$

где  $\check{h}_1$  высота осевого луча на первой поверхности линзы,

$$\check{h}_2 = \check{h}_1 - \check{\alpha}_2 d \quad (15)$$

высота осевого луча на второй поверхности линзы,  $\check{\alpha}_1$  угол осевого луча перед падением на первую поверхность линзы,  $\check{\alpha}_2$  угол осевого луча после преломления на первой поверхности линзы,  $\check{\alpha}_3$  угол осевого луча после преломления на второй поверхности линзы. Из пяти параметров осевого луча:  $\check{\alpha}_1$ ,  $\check{\alpha}_2$ ,  $\check{\alpha}_3$ ,  $\check{h}_1$ ,  $\check{h}_2$  один параметр выбирается произвольно. При  $\alpha \neq \infty$  чаще всего принимают  $\check{\alpha}_3 = 1$ .

Продольная сферическая aberrация третьего порядка одиночной линзы равна [24]

$$\Delta s'_{sph} = \frac{-x^2 \check{\alpha}_3^2}{2\check{h}_1^2} \left[ \frac{(\check{\alpha}_2 - \check{\alpha}_1)^2}{(1/n - 1)^2} \left( \frac{\check{\alpha}_2}{n} - \check{\alpha}_1 \right) \check{h}_1 + \frac{(\check{\alpha}_3 - \check{\alpha}_2)^2}{(1 - 1/n)^2} \left( \check{\alpha}_3 - \frac{\check{\alpha}_2}{n} \right) \check{h}_2 \right] \quad (16)$$

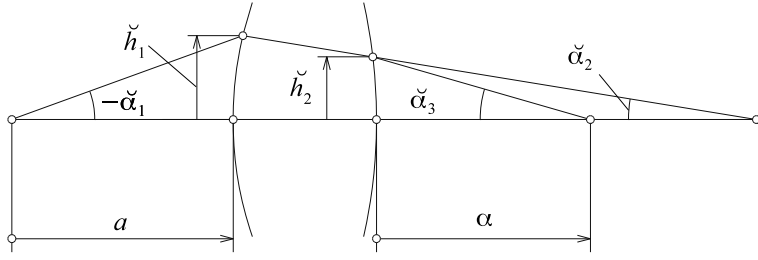


Рис. 3: Углы и высоты "осевого луча"

Из формул (8), (12), (13), (14) следует

$$k = \frac{\check{h}_1 + \check{h}_2}{\check{\alpha}_2} = 2\frac{\check{h}_1}{\check{\alpha}_2} - d = 2\frac{\check{h}_2}{\check{\alpha}_2} + d \quad (17)$$

В "Dioptricae" часто встречается выражение  $\frac{k-d}{k+d}$ . Из формул (17) следует, что

$$\frac{k-d}{k+d} = \frac{\check{h}_2}{\check{h}_1}. \quad (18)$$

В §43 указывается, что полудиаметр апертуры второй поверхности линзы должен быть больше или равен  $\frac{k-d}{k+d} \cdot x$ , т. е.  $\frac{\check{h}_2}{\check{h}_1} \cdot x$ .

В §44 начнется исследование свойств одиночной тонкой линзы. Если толщина линзы настолько мала, что по сравнению с  $k$  ей можно пренебречь, то радиусы преломляющих поверхностей, угол  $BfN$  и протяжение рассеяния можно вычислить по формулам

$$f = \frac{(n-1)ak}{k+2na}; \quad g = \frac{(n-1)\alpha k}{k+2n\alpha} \quad (19)$$

$$\angle BfN = \frac{x}{\alpha} \quad (20)$$

$$Ff = \frac{n\alpha\alpha x}{2(n-1)^2} \left[ \left( \frac{n}{a} + \frac{2}{k} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{k} \right)^2 + \left( \frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k} \right)^2 \right] \quad (21)$$

Так как для тонкой линзы  $d = 0$ , то из формулы (15) следует, что

$$\check{h}_1 = \check{h}_2 \quad (22)$$

и  $k = 2\check{h}_1/\alpha_2$ .

В §45 поясняется, что толщиной линзы пренебрегать не только, когда толщина сама по себе очень незначительна, но и во всех случаях, когда толщина линзы  $d$  много меньше параметра формы линзы  $k$ .

В §46 рассматривается задача нахождения тонкой линзы, которая при заданных расстоянии от предмета до линзы  $AE = a$ , расстоянии от линзы до главного (параксиального) изображения  $BF = \alpha$  и полудиаметра апертуры  $x$  обладает наименьшим протяжением рассеяния. При решении этой задачи в "Dioptricae" переопределяется число  $k$ . Если обозначить

вновь введенное число как<sup>10</sup>  $k_2$  и сохранить для ранее введенного параметра формы линзы обозначение  $k$ , то

$$k_2 = \frac{1}{2}k = \frac{\check{h}_1}{\check{\alpha}_2}. \quad (23)$$

При

$$k_2 = \frac{2(n+2)a\alpha}{(2n+1)(a-\alpha)} \quad (24)$$

протяжение рассеяния минимально и равно (§47)

$$Ff = \frac{n(4n-1)\alpha\alpha x x}{8(n-1)^2(n+2)} \left( \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{4(n-1)^2}{(4n-1)a\alpha} \right) \quad (25)$$

Другие формы записи выражения для расчета минимального протяжения рассеяния приведены в §49.

Если  $\check{h}_1 = \check{h}_2$ , то из формулы (16) следует, что наименьшая сферическая aberrация третьего порядка имеет место при

$$\check{\alpha}_2 = \frac{(\check{\alpha}_3 + \check{\alpha}_1)(2n+1)}{2(2+n)} \quad (26)$$

При подстановке в выражение (23) формул (14), (26), (22) получим формулу (24).

В §50 утверждается, что если линзе придать какую-либо другую форму, но так, чтобы расстояния  $AE = a$  и  $BF = \alpha$  остались неизменными, то протяжение рассеяния будет больше, чем вычисленное по формуле (25). В §51 приведены формулы для расчета наименьшего протяжения рассеяния при  $n = 31/20$ .

В §48 рассматривается случай, когда  $a = \alpha$  (т. е.  $BF = AE$ ). При подстановке этих значений в формулу (25) протяжение рассеяния равно  $Ff = \frac{nnxx}{(n-1)^2a}$ . Из формул (19) следует, что при  $a = \alpha$  радиусы поверхности линзы  $f = g = (n-1)\alpha$ . В "Dioptricae" отмечается, что при  $a = \alpha$  толщина линзы может быть любой и значение толщины линзы никак не влияет на протяжение рассеяния. Это утверждение легко можно проверить следующим способом. При  $a = \alpha$  из формул (14), (22) следует  $\check{\alpha}_3 = -\check{\alpha}_1$ . А при подстановке  $\check{\alpha}_3 = -\check{\alpha}_1$  в формулу (26) получается  $\check{\alpha}_2 = 0$ . Это означает, что участок траектории луча в линзе параллелен оси линзы. Но при  $\check{\alpha}_2 = 0$  и любом значении толщины линзы формула (15) превращается в равенство  $\check{h}_1 = \check{h}_2$ . Поэтому сферическая aberrация (как и протяжение рассеяния) не будет зависеть от толщины линзы.

В §52 рассматривается задача нахождения тонкой линзы, которая при расстоянии от предмета до линзы  $AE = a$ , расстоянии от линзы до главного (параксиального) изображения  $BF = \alpha$  и полудиаметра апертуры  $x$  обеспечивает не минимальное, а заданное протяжение рассеяния  $Ff$ . В окончательном виде решение этой задачи приведено в §55:

$$f = \frac{a\alpha}{\rho\alpha + \sigma a \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{\lambda-1}} \quad (27)$$

$$g = \frac{a\alpha}{\rho a + \sigma\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{\lambda-1}} \quad (28)$$

$$Ff = \mu\alpha\alpha x x \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[ \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right] \quad (29)$$

где

$$\mu = \frac{1}{4(n+2)} + \frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{8(n-1)^2} \quad (30)$$

<sup>10</sup>Индекс 2 в оригинальном тексте отсутствует

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n+2} \quad (31)$$

$$\rho = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n+2} - 1 \quad (32)$$

$$\tau = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{n+2} \right] \sqrt{4n-1} \quad (33)$$

$$\nu = \frac{4(n-1)^2}{4n-1} \quad (34)$$

$\lambda$  – число, которое больше или равно единицы. При  $\lambda = 1$  форма линзы обеспечивает получение наименьшего протяжения рассеяния. Знаки  $\pm$  и  $\mp$  указывают на то, что при  $\lambda > 1$  заданное протяжение рассеяния обеспечивают две линзы.

В "Dioptricae" число  $\lambda$  очень часто называется numero arbitrario (буквально – произвольное число). Но так как для тонкой линзы соотношение между радиусами преломляющих поверхностей при одних и тех же положениях предмета и изображения, показателе преломления определяется  $\lambda$  [см. формулы (27), (28)], то далее в настоящей статье  $\lambda$  будет называться "внутренний параметр тонкой линзы". Внутренний параметр тонкой линзы  $\lambda$  можно выразить через углы параксиального осевого луча следующим образом

$$\lambda = \frac{4(n+2)^2}{(4n-1)(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)^2} (\check{\alpha}_2 - \check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)^2 - \frac{8(n+2)}{(4n-1)(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)^2} (\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_3)^2 + \frac{12(n+2)}{(4n-1)(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)^2} (\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_3)\check{\alpha}_2 - \frac{4\check{\alpha}_1\check{\alpha}_3}{(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)^2} \quad (35)$$

При известном значении  $\lambda$  угол осевого параксиального луча в линзе равен

$$\check{\alpha}_2 = \frac{(2n+1)(\check{\alpha}_1 + \check{\alpha}_3) \pm (\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3)\sqrt{(4n-1)(\lambda-1)}}{2(n+2)} \quad (36)$$

В ряде руководств по прикладной геометрической оптике в качестве характеристики формы тонкой одиночной линзы используется величина (т. н. shape factor) [31]

$$\check{q} = \frac{f-g}{f+g}. \quad (37)$$

Из формул (19), (22), (37) следует, что

$$\check{\alpha}_2 = -\frac{\check{q}(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3) - \check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_3}{2n} \quad (38)$$

При подстановке выражений (38), (22), (14) в формулы (35), (36), получим, что внутренний параметр тонкой линзы  $\lambda$  и величина  $\check{q}$  связаны соотношениями

$$\lambda = \frac{(n+2)^2(a^2 + \alpha^2)}{(4n-1)(\alpha+a)^2n^2} \check{q}^2 + 4 \frac{(n-n^3+2-2n^2)(a^2 - \alpha^2)}{(4n-1)(\alpha+a)^2n^2} \check{q} + \frac{(-9n^2 + 4n^4 + 4 + 4n^3)(a^2 + \alpha^2) + (-8 + 14n^2 + 8n^3 - 8n^4)\alpha a}{(4n-1)(\alpha+a)^2n^2} \quad (39)$$

и

$$\check{q} = 2 \frac{n^2-1}{n+2} \left( \frac{a-\alpha}{a+\alpha} \right) \mp \frac{n}{n+2} \sqrt{(4n-1)(\lambda-1)} \quad (40)$$

Для тонкой линзы в §55 приведена следующая формула

$$\frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \quad (41)$$

В современной прикладной геометрической оптике величина

$$\check{\Phi} = \frac{n-1}{f} + \frac{n-1}{g} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \quad (42)$$

называется оптической силой тонкой линзы. Обратная величина  $1/\check{\Phi}$  является задним фокусным расстоянием тонкой линзы. Однако в первых трех главах "Dioptricae" понятия оптической силы и фокусного расстояния не упоминаются. Сегодня это может показаться очень странным, но в XVIII веке строгого определения термина "фокусное расстояние" не существовало. Еще в конце 1840 года К. Гаусс писал [32]

С неприятными для математической строгости недостатками мы сталкиваемся уже при первых определениях оптических терминов. Хотя понятия оси и фокальных точек линзы имеют точные определения, но это не относится к фокусному расстоянию. Большинство авторов определяют его как удаление фокальной точки линзы от оптического центра линзы. Так как при этом линза явно или неявно считается бесконечно тонкой, то для реально существующей линзы конечной толщины фокусное расстояние остается неопределенным. Иногда фокусное расстояние определяют как удаление фокальной точки от ближайшей поверхности линзы, или как расстояние от оптического центра до фокальной точки, или как расстояние от точки, которая находится на равном расстоянии от поверхностей линзы, до фокальной точки. Все эти определения дают различные значения фокусного расстояния и отличаются от определения, согласно которому величина изображения бесконечно удаленного предмета соотносится с кажущейся величиной предмета.

Можно предположить, что в первых трех главах "Dioptricae" Эйлер из-за подобных неопределенностей избегает вводить понятия фокальных точек, фокусного расстояния и оптической силы. Однако в последующих главах "Dioptricae" для тонкой линзы используется термин "фокусное расстояние".

В §54 приведены выражения для расчета радиусов кривизн поверхностей бесконечно тонких равновыпуклой, плоско-выпуклой и выпукло-плоской линз. Для этих же типов линз в §56, §57, §58 из формул (27), (28) найдены значения  $\lambda$ .

В §59 обсуждаются условия, при которых углы луча с осью, а также углы падения и преломления луча на поверхности линзы не превысят ранее установленной величины  $30^\circ$ . Эйлер считает, что необходимым (но не достаточным) условием является то, что по диаметру светового отверстия линзы не превышает  $1/4$  радиуса каждой преломляющей поверхности линзы.

В §60 исследуется изменение характеристик изображения при перемещении предмета вдоль оптической оси. Пусть в номинальном положении точка  $E$  является осевой точкой предмета, а точка  $F$  осевой точкой главного (параксиального) изображения (рис. 4). Положение этих точек относительно вершин линзы задано отрезками  $AE = a$  и  $BF = \alpha$ . Толщина линзы  $AB = d \neq 0$ . Если осевая точка предмета перемещается в точку  $e$ , то осевая точка изображения перемещается в точку  $f$ . При бесконечно малом отрезке  $Ee$  отрезок  $Ff$  также является бесконечно малым. Следовательно,  $Ff = -\frac{d\alpha}{da} \cdot Ee$ . Производная  $d\alpha/da$  находится из выражений (19). Длина отрезка  $Ff$  равна

$$Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa} \left( \frac{k+d}{k-d} \right)^2 \cdot Ee = \frac{ff[g - (n-1)\alpha]^2}{gg[(n-1)a - f]^2} \cdot Ee \quad (43)$$

В результате подстановки формул (14), (18) в равенство (43) получается

$$Ff = \left( \frac{\check{\alpha}_1}{\check{\alpha}_3} \right)^2 \cdot Ee \quad (44)$$

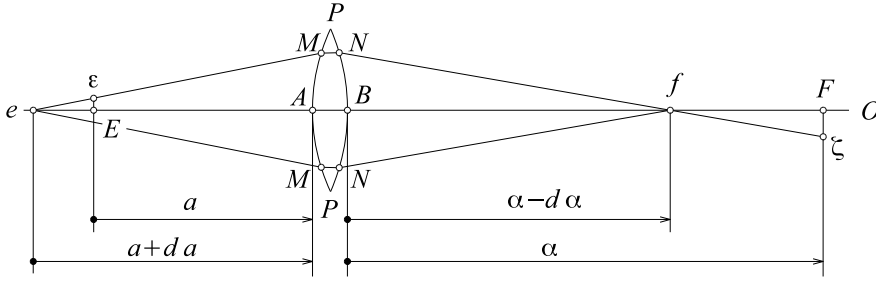


Рис. 4: К определению положения изображения при малом смещении предмета. Определение высоты изображения. Рисунок из [3] с небольшими изменениями

В современной прикладной оптике отношение  $\left(\frac{\check{\alpha}_1}{\check{\alpha}_3}\right)^2$  называется продольным увеличением линзы [21, 22].

В §61 утверждается

Так как величина  $\frac{\alpha\alpha}{aa} \left(\frac{k+d}{k-d}\right)^2$  должна быть положительной, очевидно, что если предмет от линзы удаляется, изображение всегда передвигается ближе к линзе. Следовательно, и наоборот, если предмет приближается к линзе, изображение отступает дальше от нее.

В §62 утверждается

Если толщина линзы  $d$  стремиться к нулю, то  $Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa} \cdot Ee$ ; если же, однако, толщина не равна нулю, может быть, что или  $Ff > \frac{\alpha\alpha}{aa} \cdot Ee$  или  $Ff < \frac{\alpha\alpha}{aa} \cdot Ee$ . Первое получается, если  $k$  положительное число, последнее - если отрицательное. Но если или  $k = \infty$  или  $k = 0$ , в том и другом случае будет  $Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa} \cdot Ee$ , даже если толщина линзы не равна нулю.

В §63 утверждается, что при малом смещении предметной точки вдоль оси протяжение рассеяния остается неизменным. Неизменным остается также апертура задней поверхности линзы. Эти утверждения не вполне строгие. Из формулы (5) следует, что если протяжение рассеяния одиночной линзы рассматривать как функцию от расстояния  $a$ , то первая производная этой функции по  $a$  в самом общем случае не равна нулю.

В §64 сформулирована следующая задача

Определить отношение, которое имеет высота (magnitudo<sup>11</sup>) изображения к высоте предмета не пренебрегая толщиной линзы.

В "Dioptricae" при решении этой задачи рассматривается луч, который проходит через внеосевую точку  $\epsilon$  предмета и пересекает ось линзы в точке  $e$  (рис. 4). После прохождения линзы этот луч пересечет ось линзы в точке  $f$  и проходит через внеосевую точку изображения  $\zeta$ . Если опустить из точки  $\epsilon$  на ось линзы перпендикуляр, то он пересечет ось в точке  $E$  – осевой точке предмета. Аналогично, если опустить из точки  $\zeta$  на ось линзы

<sup>11</sup>Слово magnitudo можно перевести и как высота, и как величина. В настоящей статье magnitudo переводится как высота, что более близко к современной терминологии прикладной геометрической оптики. Однако правило знаков для высот в "Dioptricae" отличается от современного.

перпендикуляр, то он пересечет ось в точке  $F$  – осевой точке изображения. Высота предмета  $E\varepsilon$  и высота изображения  $F\zeta$  считаются бесконечно малыми. Отрезки  $Ee$  и  $Ff$  также можно рассматривать как бесконечно малые и их длины удовлетворяют соотношению (43). Из подобия треугольников следует  $Ee : E\varepsilon = eA : AM$  и  $Ff : F\zeta = fB : BN$ , где  $M$  и  $N$  точки пересечения луча с поверхностями линзы. Так как ранее было показано, что отношение расстояния от точек пересечения лучом поверхностей линзы до оси линзы равно  $BN : AM = \frac{k+d}{k-d}$ , то

$$\frac{F\zeta}{E\varepsilon} = \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{k+d}{k-d}. \quad (45)$$

При подстановки в формулу (45) равенств (14),(18) получается

$$\frac{F\zeta}{E\varepsilon} = -\frac{\check{\alpha}_1}{\check{\alpha}_3}. \quad (46)$$

В современной прикладной оптике терминологии отношение  $\check{\alpha}_3/\check{\alpha}_1$  называется линейным увеличением линзы [24, 22]. В §65 разъясняется, что при  $\frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)} > 0$  изображение будет перевернутым (по современной терминологии – не конгруэнтным предмету [20]), а при  $\frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)} < 0$  прямым (по современной терминологии – конгруэнтным). В §66 указано, что для бесконечно тонкой линзы формула (45) примет вид

$$\frac{F\zeta}{E\varepsilon} = \frac{\alpha}{a}. \quad (47)$$

В этом случае, прямая, соединяющая крайние точки  $\varepsilon$  и  $\zeta$ , проходит через центр линзы. Если толщина линзы принимается в расчет, то точка пересечения прямой  $\varepsilon\zeta$  с осью линзы может находится как внутри линзы, так и вне ее.

Итоги первой главы "Dioptricae" подводятся в §67.

### 3 Содержание второй главы

Вторая глава "De diffusione imaginis per plures lentes repraesentatae" посвящена анализу положения и величины изображения, а также протяжения рассеяния в многолинзовых системах. В первом параграфе второй главы (§68) рассматривается задача суммирования продольной сферической аберрации. В этой задаче на линзу  $PP$  лучи падают не непосредственно из осевой точки предмета, а после прохождения этими лучами другой линзы (рис. 5). Перед падением на линзу  $PP$  параксиальные лучи пересекаются в точке  $E$  (главное изображение), а те лучи, которые проходят через край отверстия предшествующей линзы пересекаются в точке  $e$  (крайнее изображение). При этом из точки  $e$  лучи выходят под углом  $MeA = \Phi$  к оси линзы  $PP$ . Расстояние  $Ee$  рассматривается как очень малое по сравнению с расстоянием  $EA = a$ . Пусть двояковыпуклая линза  $PP$  создает изображение точки  $E$  в точке  $F$ . Если известны расстояние  $BF = \alpha$ , толщина линзы  $AB = d$ , показатель преломления линзы  $n$  и параметр линзы  $k$ , то радиусы линзы вычисляются по формулам (9), а протяжение рассеяния такой линзы можно вычислить как [см. формулу (10)]

$$P\alpha\alpha x \quad (48)$$

где  $x$  – полудиаметр линзы,

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2} \left\{ \left( \frac{k+d}{k-d} \right)^2 \left( \frac{n}{a} + \frac{2}{k+d} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{k+d} \right)^2 + \left( \frac{k-d}{k+d} \right)^2 \left( \frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-d} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k-d} \right)^2 \right\} \quad (49)$$

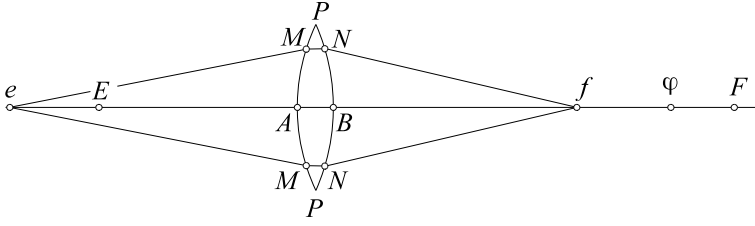


Рис. 5: К задаче о суммировании продольной сферической аберрации. Рисунок из [3]

Так как точка  $e$  находится на большем расстоянии от линзы, чем точка  $E$ , то ее параксиальное изображение точка  $\varphi$  располагается ближе к линзе, чем точка  $F$ . Если рассматривать отрезки  $Ee$  и  $F\varphi$  как бесконечно малые, то из §60 следует

$$F\varphi = \frac{\alpha\alpha}{aa} \left( \frac{k+d}{k-d} \right)^2 \cdot Ee \quad (50)$$

Но поскольку из  $e$  выходят только лучи  $eM$ , наклоненные к оси под углом  $AeM = \Phi$ , они встречаются с линзой в точках  $M$ , удаленных от  $A$  на расстояние  $AM = eA \cdot \Phi = a\Phi$ , так как мы пренебрегаем отрезком  $Ee$  по сравнению с расстоянием  $AE = a$ . А отсюда следует, что и если придать линзе отверстие, чей полудиаметр есть  $= a\Phi$ , и должно быть определено крайнее изображение предмета, находящегося в  $e$ , которое в  $f$  падает, так что  $\varphi f$  есть подходящее протяжение рассеяния для предмета, находящегося в  $e$ , и для отверстия линзы, чей полудиаметр  $= a\Phi$ . Отсюда следовательно будет отрезок  $\varphi f = P\alpha\alpha a\Phi\Phi$ ; и поскольку изображение точки  $E$  находится в  $F$ , изображение же точки  $e$  - в  $F$ , будет протяжение рассеяния посредством линзы  $PP$  производимое

$$Ff = \frac{\alpha\alpha}{aa} \left( \frac{k+d}{k-d} \right)^2 \cdot Ee + P\alpha\alpha a\Phi\Phi \quad (51)$$

В изображении же крайнем  $f$  лучи  $Nf$  таким образом с осью сходятся, что будет

$$\text{угол } BfN = \frac{k+d}{k-d} \cdot \frac{a\Phi}{\alpha} \quad (52)$$

При выводе формулы (51) не принималась во внимание зависимость протяжения рассеяния от расстояния до предмета (см. комментарии к §63). Однако для продольной сферической аберрации третьего порядка этой зависимостью можно пренебречь, так как  $\frac{\partial(P\alpha^2 a^2)}{\partial a} \cdot Ee \cdot \Phi^2$  является величиной четвертого порядка малости относительно угла  $\Phi$ .

Из формулы (51) следует, что протяжение рассеяния  $Ff$  может быть как больше, так и меньше протяжения рассеяния  $Ee$  (§69). В §70 указано, что минимально допустимое значение полудиаметра апертуры линзы  $PP$  равно  $a\Phi$ . Если апертура линзы меньше, то лучи, траектории которых проходят через точку  $e$ , не пройдут через линзу  $PP$ . Если диаметр промежуточного изображения, которое расположено в  $E$ , равен  $z$ , то диаметр изображения, формируемого линзой  $PP$  в  $F$ , равен (§71)  $= \frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)} z$ . Если  $\frac{\alpha(k+d)}{a(k-d)} > 0$ , то изображение, которое находится в  $F$ , перевернуто относительно того, которое было в  $E$ .

В "Dioptricae" при анализе оптических характеристик многолинзовая система описывается отдельными группами конструктивных параметров (§72). Каждая такая группа соответствует определенной линзе и включает в себя: два определяющих расстояния, толщину



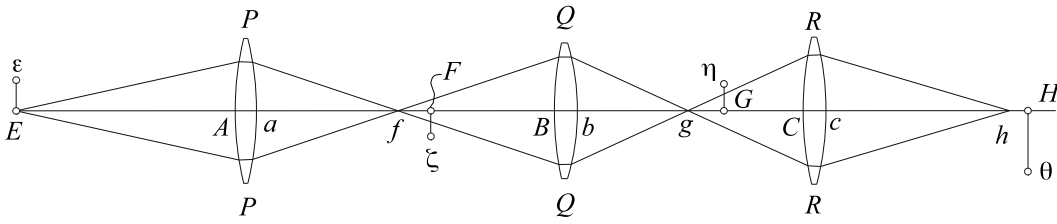


Рис. 6: Трехлинзовая оптическая система. Рисунок из [3] с небольшими изменениями

и параметр формы линзы. При этом первое определяющее расстояние равно расстоянию от линзы до предмета (для первой линзы) или параксиального изображения, которое формируют предшествующие линзы. Второе определяющее расстояние равно расстоянию от линзы до параксиального промежуточного изображения, которое формирует данная линза. Если не оговорено иное, то показатели преломления линз в "Dioptricae" считаются равными одному и тому же значению  $n$ . Если показатели преломления линз не равны друг другу, то показатели преломления первой, второй, третьей, четвертой и т. д. линз обозначаются как  $n, n', n'', n''', \dots$ . Оси всех линз лежат на одной прямой.

Определение оптических характеристик двухлинзовой системы в §73 -§78 основано на использовании соотношений, которые были получены в §§68-71. Аналогично в §79 -§84 рассматривается определение оптических характеристик трехлинзовой системы (рис. 6). При этом ищется наиболее компактная запись для формул, по которым рассчитывается протяжение рассеяния и величина изображения. В §85 указывается, что методы определения оптических характеристик, которые были использованы для двух- и трехлинзовых систем можно обобщить на оптическую систему с произвольным числом линз.

В §86 сформулирована следующая задача

Если лучи, испущенные из предмета  $E\varepsilon$ , преломляются через любое количество линз  $PP, QQ, RR, SS$  и т.д., расположенных на общей оси, определить протяжение рассеяния, обусловленное параметрами апертуры первой линзы, как и высоту формируемого изображения.

Пусть предметом является отрезок  $E\varepsilon = z$ , который перпендикулярен оптической оси и пересекает ее в точке  $E$ . В параксиальном приближении первая линза  $PP$  отображает отрезок  $E\varepsilon$  в отрезок  $F\zeta$ .

В параксиальном приближении вторая линза  $QQ$  отображает отрезок  $F\zeta$  в отрезок  $G\eta$ .

В параксиальном приближении третья линза  $RR$  отображает отрезок  $G\eta$  в отрезок  $H\theta$ .

В параксиальном приближении четвертая линза  $SS$  отображает отрезок  $H\theta$  в отрезок  $I\iota$ .

В параксиальном приближении пятая линза  $TT$  отображает отрезок  $I\iota$  в отрезок  $K\chi$ .

Аналогично можно описать действие всех последующих линз<sup>12</sup>. Обозначения определяю-

<sup>12</sup>В §86 даны формулы для расчета оптических характеристик оптических систем из одной, двух, трех, четырех и пяти линз в двух случаях: когда показатели преломления линз равны и когда показатели преломления линз различны. Для краткости в настоящей статье приводятся формулы для оптических систем из одной, двух, трех, четырех линз, показатели преломления которых не равны друг другу.

Таблица 1: Обозначения конструктивных параметров многолинзовой системы

Для линзы	Определяющие расстояния		Толщина линзы	параметр формы линзы	Показатель преломления
	первое	второе			
<i>PP</i>	$EA = a$	$aF = \alpha$	$Aa = v$	$k$	$n$
<i>QQ</i>	$FB = b$	$bG = \beta$	$Bb = v'$	$k'$	$n'$
<i>RR</i>	$Gc = c$	$cH = \gamma$	$Cc = v''$	$k''$	$n''$
<i>SS</i>	$HD = d$	$di = \delta$	$Dd = v'''$	$k'''$	$n'''$
<i>TT</i>	$IE = e$	$eK = \varepsilon$	$Ee = v''''$	$k''''$	$n''''$

щих расстояний, толщин, параметров формы, показателей преломления линз *PP*, *QQ*, *RR*, *SS*, *TT* приведены в таблице 1.

Длина (вдоль оси) воздушного промежутка между первой и второй линзами равна  $= \alpha + b$ , между второй и третьей линзами равна  $= \beta + c$ , между третьей и четвертой линзами  $= \gamma + d$ , между четвертой и пятой линзами  $= \delta + e$  и т.д. Все эти длины по своей природе должны быть положительными, даже если отдельные определяющие расстояния иногда бывают отрицательными. Расстояние  $a$  во второй главе "Dioptricae" считается положительным.

Для вычисления величин промежуточных изображений в §86 приведены следующие формулы:

$$F\zeta = \frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha}{a} z \quad G\eta = \frac{1}{ii'} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab} z \quad H\theta = \frac{1}{ii'i''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z \quad I\iota = \frac{1}{ii'i''i'''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} z \quad (53)$$

где

$$i = \frac{k - v}{k + v}, \quad i' = \frac{k' - v'}{k' + v'}, \quad i'' = \frac{k'' - v''}{k'' + v''}, \quad i''' = \frac{k''' - v'''}{k''' + v'''}$$

При  $\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha}{a} > 0$  изображение, которое формирует линза *PP*, будет перевернутым;

при  $\frac{1}{ii'} \cdot \frac{\alpha\beta}{ab} > 0$  изображение, которое формирует линзы *PP* и *QQ*, будет прямым;

при  $\frac{1}{ii'i''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} > 0$  изображение, которое формирует линзы *PP*, *QQ* и *RR*, будет перевернутым;

при  $\frac{1}{ii'i''i'''} \cdot \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} > 0$  изображение, которое формирует линзы *PP*, *QQ*, *RR* и *SS*, будет прямым.

Если полудиаметр апертуры передней поверхности первой линзы принять равным  $x$ , то полудиаметр апертуры задней поверхности первой линзы должен быть больше или равен  $ix$ ;

полудиаметр апертуры передней поверхности второй линзы должен быть больше или равен  $i \cdot \frac{bx}{\alpha}$ ;

полудиаметр апертуры задней поверхности второй линзы должен быть больше или равен  $ii' \cdot \frac{bx}{\alpha}$ ;

полудиаметр апертуры передней поверхности третьей линзы должен быть больше или равен  $ii' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta}$ ;

полудиаметр апертуры задней поверхности третьей линзы должен быть больше или равен  $ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta}$ ;

полудиаметр апертуры передней поверхности четвертой линзы должен быть больше или равен  $ii'i'' \cdot \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$ ;

полудиаметр апертуры задней поверхности четвертой линзы должен быть больше или равен  $ii'i''i''' \cdot \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}$ .

Чем больше высота предмета, тем больше полудиаметры апертур поверхностей линз должны превосходить указанные здесь значения (§87).

В §86 даны следующие формулы для расчета протяжения рассеяния систем из одной, двух, трех и четырех линз:

Если оптическая система состоит только из одной линзы  $PP$ , то протяжение рассеяния равно

$$Ff = \alpha\alpha xx \cdot P, \quad (54)$$

где

$$P = \frac{n}{2(n-1)^2} \left[ \frac{1}{ii} \left( \frac{n}{a} + \frac{2}{k+v} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{k+v} \right)^2 + ii \left( \frac{n}{\alpha} - \frac{2}{k-v} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{k-v} \right)^2 \right].$$

Лучи, которые сходятся в точку  $f$ , наклонены к оси под углом  $i \cdot \frac{x}{\alpha}$ .

Если оптическая система состоит только из линз  $PP$  и  $QQ$ , то протяжение рассеяния равно

$$Gg = \beta\beta xx \left( \frac{1}{i'i'} \cdot \frac{\alpha\alpha}{bb} \cdot P + ii \cdot \frac{bb}{\alpha\alpha} \cdot Q \right), \quad (55)$$

где

$$Q = \frac{n'}{2(n'-1)^2} \left[ \frac{1}{i'i'} \left( \frac{n'}{b} + \frac{2}{k'+v'} \right) \left( \frac{1}{b} + \frac{2}{k'+v'} \right)^2 + i'i' \left( \frac{n'}{\beta} - \frac{2}{k'-v'} \right) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{2}{k'-v'} \right)^2 \right]$$

Лучи, которые сходятся в точку  $g$ , наклонены к оси под углом  $ii' \cdot \frac{bx}{\alpha\beta}$ .

Если оптическая система состоит из линз  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ , то протяжение рассеяния равно

$$Hh = \gamma\gamma xx \left( \frac{1}{i'i' \cdot i''i''} \cdot \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc} \cdot P + \frac{ii}{i''i''} \cdot \frac{bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc} \cdot Q + ii \cdot i''i'' \cdot \frac{bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta} \cdot R \right),$$

где

$$R = \frac{n''}{2(n''-1)^2} \left[ \frac{1}{i''i''} \left( \frac{n''}{c} + \frac{2}{k''+v''} \right) \left( \frac{1}{c} + \frac{2}{k''+v''} \right)^2 + i''i'' \left( \frac{n''}{\gamma} - \frac{2}{k''-v''} \right) \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{k''-v''} \right)^2 \right].$$

Лучи, которые сходятся в точку  $h$ , наклонены к оси под углом  $ii'i'' \cdot \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$ .

Если оптическая система состоит из линз  $PP$ ,  $QQ$ ,  $RR$  и  $SS$ , то протяжение рассеяния равно

$$Ii = \delta\delta xx \left( \frac{1}{i'i' \cdot i''i'' \cdot i''i''} \cdot \frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd} \cdot P + \frac{ii}{i''i'' \cdot i''i''} \cdot \frac{bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd} \cdot Q + \frac{ii \cdot i'i'}{i''i'' \cdot i''i''} \cdot \frac{bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd} \cdot R + ii \cdot i''i'' \cdot i''i'' \cdot \frac{bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma} \cdot S \right) \quad (56)$$

$$S = \frac{n'''}{2(n''' - 1)^2} \left[ \frac{1}{i'''i'''} \left( \frac{n'''}{d} + \frac{2}{k''' + v'''} \right) \left( \frac{1}{d} + \frac{2}{k''' + v'''} \right)^2 + \right. \\ \left. i'''i''' \left( \frac{n'''}{\delta} - \frac{2}{k''' - v'''} \right) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{2}{k''' - v'''} \right)^2 \right]$$

Лучи, которые сходятся в точку  $i$ , наклонены к оси под углом  $i'i''i''' \cdot \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

В §88 указано, что при бесконечно большом расстоянии от последней линзы до изображения протяжение рассеяния также становится бесконечным. Необходимо отметить, что бесконечно большое расстояние от последней линзы до изображения является характерной особенностью оптических систем, которые работают совместно с глазом. В первую очередь это микроскопы и зрительные трубы – наиболее распространенные оптические приборы в XVIII веке. В современной прикладной геометрической оптике при бесконечно большом расстоянии от последней линзы до изображения продольная сферическая аберрация оценивается в обратных линейных величинах [22, 21, 24].

Заслуживает внимания текст §89:

Следовательно, при прочих равных, сколько бы ни было линз, протяжение рассеяния постоянно пропорционально квадрату диаметра апертуры первой поверхности, то есть самой этой апертуре. Откуда при уменьшенной в два раза апертуре первой поверхности протяжение рассеяния будет в четыре раза меньше.

Так как сегодня подобный вывод может быть сделан из самых общих положений теории аберраций третьего порядка, то текст §89 указывает, насколько еще мало были исследованы аберрационные свойства оптических систем во время Эйлера.

В §90 рассматривается случай, когда вместо определяющих дистанций  $\alpha, b, \beta, c, \gamma, \dots$  и параметров формы линз  $k, k', k'', k''', \dots$  заданы радиусы линз и расстояния между линзами  $aB = F, bC = G, cD = H, \dots$ . В данном случае для расчета протяжения рассеяний и высоты изображения можно также использовать формулы из §86, если предварительно найти параметры формы линз  $k, k', k'', k''', \dots$  и определяющие дистанции  $\alpha, b, \beta, c, \gamma, \dots$  по формулам (8). Например, если радиус передней поверхности первой линзы равен  $f$ , то  $k$  находится из формулы

$$\frac{n-1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{2n}{k+v}.$$

Расстояние  $\alpha$  находится из формулы

$$\frac{n-1}{g} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2n}{k-v},$$

где  $g$  – радиус задней поверхности первой линзы. По найденному значению  $\alpha$  находится расстояния  $b = F - \alpha$ , где  $F = aB$  расстояние между первой и второй линзой. Параметры формы линзы  $k', k'', k''', \dots$  и определяющие расстояния  $\beta, c, \gamma, \dots$  находятся аналогично.

В §§91-94 определяется величина главного (параксиального) изображения и протяжение рассеяния, которые формирует система бесконечно тонких линз. При этом предполагается, что оси всех линз находятся на одной прямой. Пусть как и ранее предметом является отрезок  $E\varepsilon = z$ , который перпендикулярен оптической оси и пересекает ее в точке  $E$ . Тогда

В параксиальном приближении первая линза  $PP$  отображает отрезок  $E\varepsilon$  в отрезок  $F\zeta$ . При этом определяющие расстояния для линзы  $PP$  равны  $EA = a$  и  $aF = \alpha$ , а внутренний параметр тонкой линзы равен  $\lambda$ .

В параксиальном приближении вторая линза  $QQ$  отображает отрезок  $F\zeta$  в отрезок  $G\eta$ .

При этом определяющие расстояния для линзы  $QQ$  равны  $FB = b$  и  $bG = \beta$ , а внутренний параметр тонкой линзы равен  $\lambda'$ .

В паракиальном приближении третья линза  $RR$  отображает отрезок  $G\eta$  в отрезок  $H\theta$ . При этом определяющие расстояния для линзы  $RR$  равны  $Gc = c$  и  $cH = \gamma$ , а внутренний параметр тонкой линзы равен  $\lambda''$ .

В паракиальном приближении четвертая линза  $SS$  отображает отрезок  $H\theta$  в отрезок  $I\iota$ . При этом определяющие расстояния для линзы  $SS$  равны  $HD = d$  и  $dI = \delta$ , а внутренний параметр тонкой линзы равен  $\lambda'''$ .

В паракиальном приближении пятая линза  $TT$  отображает отрезок  $I\iota$  в отрезок  $K\chi$ . При этом определяющие расстояния для линзы  $TT$  равны  $IE = e$  и  $eK = \varepsilon$ , а внутренний параметр тонкой линзы равен  $\lambda''''$ .

Аналогично можно описать предмет и изображение для всех последующих линз<sup>13</sup>.

Показатели преломления линз  $PP$ ,  $QQ$ ,  $RR$  и  $SS$  равны  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$ . Обозначим как  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $\mu''$ ,  $\mu'''$  значения, которые получаются при подстановке в формулу (30) показателей преломления  $n$ ,  $n'$ ,  $n''$ ,  $n'''$  соответственно. Аналогичным образом по формуле (31) находятся значения  $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $\sigma''$ ,  $\sigma'''$ ; по формуле (32) находятся значения  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $\rho''$ ,  $\rho'''$ ; по формуле (33) находятся значения  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\tau''$ ,  $\tau'''$ ; по формуле (34) находятся значения  $\nu$ ,  $\nu'$ ,  $\nu''$ ,  $\nu'''$ .

Для вычисления величин промежуточных изображений в §91 приведены следующие формулы:

$$F\zeta = \frac{\alpha}{a}z \quad G\eta = \frac{\alpha\beta}{ab}z \quad H\theta = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}z \quad I\iota = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}z \quad (57)$$

При  $\frac{\alpha}{a} > 0$  изображение, которое формирует линза  $PP$ , будет перевернутым относительно исходного предмета  $E\varepsilon$ ;

при  $\frac{\alpha\beta}{ab}$  изображение, которое формирует линзы  $PP$  и  $QQ$ , будет прямым относительно исходного предмета  $E\varepsilon$ ;

при  $\frac{\alpha\beta\gamma}{abc} > 0$  изображение, которое формирует линзы  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ , будет перевернутым относительно исходного предмета  $E\varepsilon$ ;

при  $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} > 0$  изображение, которое формирует линзы  $PP$ ,  $QQ$ ,  $RR$  и  $SS$ , будет прямым относительно исходного предмета  $E\varepsilon$ .

Если полудиаметр апертуры передней поверхности первой линзы принять равным  $x$ , то:

полудиаметр апертуры второй линзы должен быть больше или равен  $\frac{b}{a}x$ ;

полудиаметр апертуры третьей линзы  $RR$  должен быть больше или равен  $\frac{bc}{\alpha\beta}x$ ;

полудиаметр апертуры четвертой линзы  $SS$  должен быть больше или равен  $\frac{bcd}{\alpha\beta\gamma}x$ .

В §91 даны следующие формулы для расчета протяжения рассеяния систем из одной, двух, трех и четырех бесконечно тонких линз:

Если оптическая система состоит только из одной линзы  $PP$ , то протяжение рассеяния равно

$$Ff = \mu\alpha\alpha x \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[ \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right] \quad (58)$$

Лучи, которые сходятся в точку  $f$ , наклонены к оси под углом  $\frac{x}{\alpha}$ .

Если оптическая система состоит только из линз  $PP$  и  $QQ$ , то протяжение рассеяния

<sup>13</sup>В §91 отдельно даны формулы для случая, когда показатели преломления линз равны и для случая, когда показатели преломления линз не равны. В настоящей статье приведены только формулы для оптических систем из одной, двух, трех, четырех линз, показатели преломления которых не равны

равно

$$Gg = \beta\beta xx \left\{ \frac{\mu\alpha\alpha}{bb} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right) + \frac{\mu'bb}{\alpha\alpha} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \lambda' \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu'}{b\beta} \right) \right\}$$

Лучи, которые сходятся в точку  $g$ , наклонены к оси под углом  $\frac{bx}{\alpha\beta}$ .

Если оптическая система состоит из линз  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ , то протяжение рассеяния равно

$$Hh = \gamma\gamma xx \left\{ \frac{\mu\alpha\alpha\beta\beta}{bbcc} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right) + \frac{\mu'bb\beta\beta}{\alpha\alpha cc} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \lambda' \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu'}{b\beta} \right) + \frac{\mu''bbcc}{\alpha\alpha\beta\beta} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \lambda'' \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 + \frac{\nu''}{c\gamma} \right) \right\}$$

Лучи, которые сходятся в точку  $h$ , наклонены к оси под углом  $\frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}$ .

Если оптическая система состоит из линз  $PP$ ,  $QQ$ ,  $RR$  и  $SS$ , то протяжение рассеяния равно

$$Ii = \delta\delta xx \left\{ \frac{\mu\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{bbccdd} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right) + \frac{\mu'bb\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha ccdd} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \lambda' \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu'}{b\beta} \right) + \frac{\mu''bbcc\gamma\gamma}{\alpha\alpha\beta\beta dd} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \lambda'' \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 + \frac{\nu''}{c\gamma} \right) + \frac{\mu'''bbccdd}{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} \right) \left( \lambda''' \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} \right)^2 + \frac{\nu'''}{d\delta} \right) \right\}$$

Лучи, которые сходятся в точку  $i$ , наклонены к оси под углом  $\frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

В §§92-93 рассматривается случай, когда вместо определяющих дистанций  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , ... и внутренних параметров тонких линз  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ , ... заданы радиусы линз и расстояния между линзами  $aB = F$ ,  $bC = G$ ,  $cD = H$ , .... В данном случае для расчета протяжения рассеяний и высоты изображения также можно использовать формулы из §91, если предварительно найти по формуле (41) определяющие дистанции  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $c$ ,  $\gamma$ , ... и на основании выражений (27), (28) рассчитать внутренние параметры тонких линз  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ , ....

В последнем параграфе второй главы (§95) отмечается, что чем больше в системе линз, тем из большего числа слагаемых состоит формула для вычисления протяжение рассеяния. А так как величины  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $c$ ,  $\gamma$ ,  $d$ ,  $\delta$  и т. д. могут принимать и отрицательные значения (но расстояния между линзами  $\alpha + b$ ,  $\beta + c$ ,  $\gamma + d$ ,  $\delta + e$  и т. д. должны быть положительными), то одно или несколько слагаемых могут быть отрицательными. Поэтому протяжение рассеяния в многолинзовых системах может быть сведено к нулю.

## 4 Содержание третьей главы

Третья глава "Dioptricae" называется "De lentibus compositis seu multiplicatis". В этой главе рассматриваются системы из тонких линз, оси которых лежат на одной прямой; расстояния между линзами принимаются малыми (в предельном случае – нулевыми). Показатели преломления всех линз, о которых идет речь в основном тексте третьей главы, считаются равными  $n$ . А в Дополнениях I, II и III, которые включены в главу III, рассматриваются системы из тонких линз, показатели преломления которых различны.

В §§96-121 изучаются свойства тонкой двухлинзовой системы. В §97 указывается, что толщиной системы из двух линз пренебрегать менее оправдано, чем толщиной каждой из двух ее линз, взятых в отдельности. Кроме того,

Ведь если бы линзы непосредственно в точке соприкасались, следовало бы опасаться цветовых явлений, которые Ньютоном наблюдались;

Очевидно, что под этими цветовыми явлениями следует понимать интерференционные кольца и полосы. В §101 предлагается избежать указанной в §97 проблемы следующим способом

Нет надобности, чтобы линзы явно соприкасались, так как, возможно, закон преломления мог бы приводиться в замешательство: это будет исключено, если между линзами будет хотя бы самое маленькое расстояние, что достаточно для нашего устройства, так как две толщины линз также не равны точно нулю.

Гипотеза о возникновении интерференционных колец и полос вследствие нарушения закона преломления предложена Ньютоном в [23]. Так как интерференционные явления во время Эйлера не были еще достаточно изучены, то ссылка на гипотезу Ньютона вполне естественна.

Как и в главе II, первая линза  $PP$  описывается определяющими расстояниями  $a$ ,  $\alpha$ , внутренним параметром тонкой линзы  $\lambda$ . Вторая линза  $QQ$  описывается определяющими расстояниями  $b$ ,  $\beta$ , внутренним параметром тонкой линзы  $\lambda'$ . Так как расстояние между линзами стремится к нулю, то  $\alpha = -b$ . Главное (параксиальное) изображение предмета, который расположен перед линзой на расстоянии  $AE = a$ , будет находиться за линзой на расстоянии  $bG = \beta$  (§98). По аналогии с одиночной линзой можно рассматривать  $a$  и  $\beta$  как определяющие расстояния тонкой двухлинзовой системы (§99). При заданных значениях  $a$  и  $\beta$  расстояние  $\alpha$  (или расстояние  $b$ ) можно выбрать произвольным образом. Так как значения  $\lambda$  и  $\lambda'$  тоже можно выбрать произвольно, то при заданных значениях  $a$  и  $\beta$  можно получить бесконечно большое число вариантов тонкой двухлинзовой системы (§99).

Так как толщины и расстояние между линзами бесконечно малые, то полудиаметры апертур остальных поверхностей должны быть больше или равны полудиаметру апертуры первой поверхности первой линзы  $x$  (§100).

В Задаче 1 (§102) требуется найти протяжение рассеяния  $Gg$  и высоту изображения для тонкой двухлинзовой системы (рис. 7), когда предмет  $E\varepsilon = z$  расположен перед оптической системой на расстоянии  $AE = a$ , а его изображение  $G\eta$  находится за оптической системой на расстоянии  $bG = \beta$ ; полудиаметр апертуры равен  $x$ .

Решение Задачи 1 основано на результатах, которые были получены в главе II: высота главного (параксиального) изображения

$$G\eta = \frac{\beta}{a}z, \quad (59)$$

протяжение рассеяния

$$Gg = \mu\beta\beta xx \left\{ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) \left( \lambda \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha} \right) + \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \lambda' \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu}{b\beta} \right) \right\}. \quad (60)$$

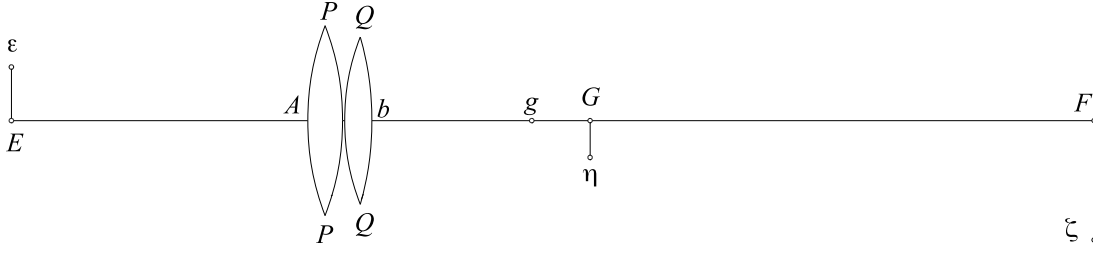


Рис. 7: Тонкая двухлинзовая оптическая система. Рисунок из [3]

Пересекающиеся в  $g$  лучи наклонены к оси на угол  $\frac{x}{\beta}$ .

Пусть определяющие расстояния тонкой одиночной линзы равны определяющим расстояниям  $a$  и  $\beta$  рассматриваемой тонкой двухлинзовой системы, полудиаметр апертуры тонкой одиночной линзы также равен полудиаметру апертуры тонкой двухлинзовой системы  $x$ , высота предмета равна  $E\varepsilon = z$  (§104). Тогда высота изображения, которое формирует тонкая линза, равна высоте изображения которое формирует тонкая двухлинзовая система  $G\eta = z\beta/a$ . Протяжение рассеяния, которое создает одиночная тонкая линза, равно

$$Gg = \mu\beta\beta x x \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \lambda^0 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu}{a\beta} \right) \quad (61)$$

где  $\lambda^0$  – внутренний параметр тонкой линзы.

В §§105-106 указано, что при том же самом отверстии и при тех же самых определяющих расстояниях протяжение рассеяния тонкой двухлинзовой системы может изменяться в более широких пределах, чем у одиночной тонкой линзы.

В Задаче 2 (§107) требуется найти тонкую одиночную линзу, протяжение рассеяния которой равно протяжению рассеяния тонкой двухлинзовой системы. При этом определяющие расстояния и полудиаметр апертуры одиночной тонкой линзы равны соответствующим параметрам тонкой двухлинзовой системы. В ходе решения Задачи 2 доказывается, что протяжение рассеяния тонкой двухлинзовой системы можно вычислить по формуле (61), если принять

$$\lambda^0 = \lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f), \quad (62)$$

где

$$f = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right). \quad (63)$$

Так как  $(1/a + 1/\alpha)$  – оптическая сила первой линзы (см. комментарий к §55), а  $(1/a + 1/\beta)$  оптическая сила тонкой двухлинзовой системы, то  $f$  в современной прикладной геометрической оптике называется приведенной оптической силой первой линзы. Приведенная оптическая сила второй линзы равна

$$1 - f = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right). \quad (64)$$

Приведенные оптические силы линз очень часто используются в современной прикладной оптике при синтезе оптических систем на основе теории аббераций третьего порядка [22, 24].

Пусть оптическая сила тонкой двухлинзовой системы положительная. Тогда при  $f > 0$  первая линза положительная, а при  $f < 0$  первая линза отрицательная; при  $f < 1$  вторая



линза положительная, а при  $f > 1$  вторая линза отрицательная. Поэтому обе линзы могут быть положительными только при  $0 < f < 1$ . Если оптическая сила тонкой двухлинзовой системы отрицательная, то эти условия меняются на противоположные.

В §§108-109 доказывається, что изготовить одиночную тонкую линзу, определяющие расстояния и протяжение рассеяния которой эквивалентны двухлинзовой тонкой системе, можно только в том случае, когда  $\lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f) > 1$ .

При  $f = 0$  формула (62) принимает вид:  $\lambda^0 = \lambda'$ . Кроме того, если  $f = 0$ , то передняя линза афокальная:  $\alpha = -a$ . Из формул (27), (28) следует, что при  $\alpha = -a$  поверхностями передней линзы являются концентричные сферы. Поэтому если  $f = 0$ , то передняя линза избыточна. При  $f = 1$  формула (62) принимает вид:  $\lambda^0 = \lambda$ . Кроме того, при  $f = 1$  задняя линза афокальная:  $b = -\beta$ . Из формул (27), (28) следует, что в этом случае поверхностями задней линзы являются концентричные сферы. Поэтому при  $f = 1$  задняя линза избыточна (§110).

Так как числа  $\lambda$  и  $\lambda'$  не могут быть меньше единицы и для  $n = 31/20$  имеет место  $\nu = 0.232692$ , то при  $\lambda^0 = 0$  значение  $f$  не может лежать между 0 и 1 (§111). Поэтому (§112) при  $0 < f < 1$  можно определить только наименьшее значение  $\lambda^0 = 0$ . При  $f < 0$  и при  $f > 1$  можно обеспечить  $\lambda^0 = 0$ .

В §112 начинается, а в §113 продолжается обсуждение вопроса о влиянии на протяжение рассеяния малых отклонений, которые могут иметь место при изготовлении линз. Так как при  $\lambda = 1$  протяжение рассеяния одиночной линзы минимально, а в окрестности минимального значения малые отклонения несут существенны, то наиболее технологичны те линзы, для которых внутренний параметр  $\lambda$  принимает значение, которое равно или немного больше единицы.

В Задаче 3 (§114) требуется найти наименьшее значение  $\lambda^0$ , которое можно достичь в тонкой двухлинзовой системе при  $0 < f < 1$ . Решение Задачи 3, которое в "Dioptricae" получено чисто алгебраическими методами, имеет вид  $\lambda = 1$ ,  $\lambda' = 1$ ,  $f = 1/2$ . При подстановке этих значений в формулу (62) имеем

$$\lambda^0 = \frac{1-\nu}{4}. \quad (65)$$

Если как обычно  $n = 31/20$ , то  $\lambda^0 = 0.191827$  и

$$Gg = \mu\beta\beta xx \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) \left( 0.191827 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu}{a\beta} \right) \quad (66)$$

Если  $n = 8/5$ , то  $\nu = 4/15$ ,  $\lambda^0 = 0.183333$ .

В §115 указано, что при тех же самых определяющих расстояниях  $\alpha$  и  $\beta$  наименьшее протяжение рассеяния для одиночной тонкой линзы равно

$$Gg = \mu\beta\beta xx \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) \left( \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right)^2 + \frac{\nu}{a\beta} \right) \quad (67)$$

Таким образом (§116)

... ясно, что от описанной тонкой двухлинзовой системы рассеяние возникает много меньше, чем от одиночной линзы, даже если бы та [одиночная линза] уже была устроена для минимального рассеяния. Ведь когда остальные части одинаковые, коэффициент [при] члене  $(1/\alpha + 1/b)^2$  в тонкой двухлинзовой системе более чем в пять раз меньше, чем в одиночной [тонкой] линзе.

В §117 утверждается:

Таблица 2: Конструктивные параметры тонких двухлинзовых систем, в которых  $\lambda^0 = 0$

$f$	$\lambda$	$\lambda'$
1.5	1	28.396152
2	1	8.465384
3	1	3.549519
4	1	2.473789
5	1	2.025841
6	1	1.783846
-0.5	28.396152	1
-1	8.465384	1
-2	3.549519	1
-3	2.473789	1
-4	2.025841	1
-5	1.783846	1

Если мы возьмем  $\lambda = 1$  и  $\lambda' = 1$ , или по крайней мере  $\lambda = \lambda'$ , для  $\lambda^0$  не может иметь места меньшая величина, чем мы нашли, даже если для  $f$  другие величины мы хотим принять. Отсюда, если каждая линза уже сама по себе создает минимальное рассеяние, для тонкой двухлинзовой системы величина самого  $\lambda^0$  не может быть меньше чем 0.191827.

При подстановке в формулу (62) измененных значений  $\lambda = 1.1$ ,  $\lambda' = 1.1$ ,  $f = 0.5 \pm 0.05$  получается  $\lambda^0 = 0.2257$ . Так как данное значение отличается от наименьшего примерно на  $1/30$ , то в §118 сделан вывод, что подобные тонкие двухлинзовые системы устойчивы к технологическим ошибкам.

В Задаче 4 (§119) для заданных определяющих расстояний  $AE = a$  и  $bG = \beta$  требуется найти тонкие двухлинзовые системы где выполняется условие  $\lambda^0 = 0$ . Задача 4 имеет бесконечно много решений. В "Dioptricae" рассматриваются решения для двух случаев: когда  $f > 1$  и  $\lambda = 1$  или когда  $f < 0$  и  $\lambda' = 1$ . В первом случае по заданным значениям  $f$  и  $\lambda = 1$  находится  $\lambda'$ . Во втором случае по заданным значениям  $f$  и  $\lambda' = 1$  находится  $\lambda$ . Для первого и второго случаев в "Dioptricae" даны численные примеры расчетов значений  $\lambda'$  и  $\lambda$  соответственно. Заданные и рассчитанные в этих примерах значения параметров тонких двухлинзовых систем приведены в таблице 2.

В §120 исследуется устойчивость решения Задачи 4. В качестве исходного рассматривается решение (см. таблицу 2)  $f = 5$ ,  $\lambda = 1$  и  $\lambda' = 2.025841$ . При переходе от  $f = 5$  к  $f = 5.1$ , вместо  $\lambda^0 = 0$  получается  $\lambda^0 = -2.011$ . Из этого делается вывод, что предпочтение следует отдать тонкой двухлинзовой системе, которая найдена при решении Задачи 3.

Основные итоги исследования тонкой двухлинзовой системы подводятся в §121.

После §121 следует Дополнение I. В Дополнении I рассматривается случай, когда показатели преломления линз в тонкой двухлинзовой системе отличаются друг от друга. Для данного случая приведены новые решения Задачи 1, Задачи 2, Задачи 3 и Задачи 4. Кроме того, при новом решении Задачи 3 и Задачи 4 расстояние между линзами считается не строго равным нулю, а принимается равной некоторой малой величине. Показано, что протяжение рассеяния можно уменьшить надлежащим выбором расстояния между линзами.

В Дополнении I отмечается, что при  $f < 0$  или  $f > 1$  можно не только обеспечить  $\lambda^0 = 0$  (Задача 4), но и выполнить условие устранения неправильности, возникающей из-за различной способности лучей к преломлению (т.е. хроматических аберраций по современной терминологии). Но сами условия исправления хроматических аберраций в Дополнении I

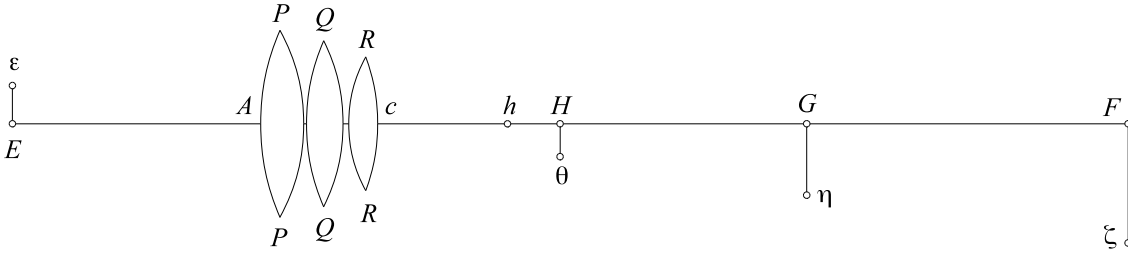


Рис. 8: Тонкая трехлинзовая оптическая система. Рисунок из [3]

не приводятся, так как хроматические aberrации подробно исследуются в шестой главе.

В §§122-151 рассматривается тонкая трехлинзовая система (рис. 8). Определение тонкой трехлинзовой системы дано в §122. В §122 также указано, что толщина тонкой трехлинзовой системы является по необходимости больше, чем у тонкой двухлинзовой системы.

Тонкую трехлинзовую систему можно рассматривать как оптическую систему, которая состоит из передней тонкой двухлинзовой системы и задней одиночной линзы или из передней одиночной линзы и задней тонкой двухлинзовой системы (§123).

Из предыдущих параграфов третьей главы ясно, что в отличие от тонкой одиночной линзы, протяжение рассеяния тонкой двухлинзовой системы может принимать практически любые значения. Поэтому использование тонкой трехлинзовой системы признается целесообразным в том случае, если необходимо получить малую величину протяжения рассеяния и обеспечить устойчивость оптической системы к технологическим ошибкам.

В Задаче 5 (§125) требуется определить все тонкие трехлинзовые системы и создаваемое ими протяжение рассеяния, если известны расстояния до предмета и расстояние до изображения. В показанной на рис. 8 тонкой трехлинзовой системе предмет  $E\varepsilon$ , чья высота равна  $z$ , находится от первой линзы  $PP$  на расстоянии  $AE = a$ ; определяющие расстояния первой линзы равны  $a$  и  $\alpha$ , второй линзы  $QQ$   $b$  и  $\beta$ , а третьей  $RR$   $c$  и  $\gamma$ . Так как расстояния между линзами равны нулю, то  $\alpha + b = 0$ ,  $\beta + c = 0$ . По аналогии с тонкой одиночной линзой и тонкой двухлинзовой системой  $a$  и  $\gamma$  называются определяющими расстояниями тонкой трехлинзовой системы.  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть выбраны произвольно. Если бы присутствовала только одна первая линза  $PP$ , то изображением был бы отрезок  $F\zeta$ , при  $AF = \alpha$  и  $F\zeta = \frac{\alpha}{a}z$ . Если бы присутствовали только две первых линзы  $PP$  и  $QQ$ , то изображением был бы отрезок  $G\eta$ , при  $AG = \beta$  и  $G\eta = \frac{\beta}{a}z$ . Для тонкой трехлинзовой системы изображением будет отрезок  $H\theta$ , при  $cH = \gamma$  и  $H\theta = \frac{\gamma}{a}z$ . Так как  $\frac{\alpha\beta}{bc} = 1$ , то изображение будет перевернутым. Таким образом параксиальные характеристики тонкой трехлинзовой системы эквивалентны одиночной тонкой линзе с определяющими расстояниями  $a$  и  $\gamma$ .

Протяжение рассеяния тонкой трехлинзовой системы можно представить в виде

$$Hh = \mu\gamma\gamma x x \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) \left( \lambda^{(3)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 + \frac{\nu}{a\gamma} \right) \quad (68)$$

где  $x$  полудиаметр апертуры,

$$\lambda^{(3)} = \lambda f^3 + \lambda' g^3 + \lambda'' h^3 - \nu(1-f)(1-g)(1-h), \quad (69)$$

$\lambda, \lambda', \lambda''$  внутренние параметры тонких линз  $PP, QQ, RR$  соответственно,

$$f = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (70)$$

$$g = \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (71)$$

$$h = \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) = 1 - f - g \quad (72)$$

Так как  $(1/a + 1/\alpha)$ ,  $(1/b + 1/\beta)$ ,  $(1/c + 1/\gamma)$  – оптические силы первой, второй и третьей линз (см. комментарий к §55), а  $(1/a + 1/\gamma)$  оптическая сила тонкой трехлинзовой системы, то в современной прикладной геометрической оптике  $f, g, h$  называются приведенными оптическими силами первой, второй и третьей линз соответственно.

Наклон к оси сходящихся в  $k$  лучей будет равен  $= \frac{x}{\gamma}$ .

Если определяющие дистанции одиночной тонкой линзы равны  $a$  и  $\gamma$ , внутренний параметр равен  $\lambda^{(3)}$ , полудиаметр апертуры равен  $x$ , то протяжение рассеяния такой линзы равно протяжению рассеяния трехлинзовой тонкой системы (§126).

Если или  $f = 0$ , или  $g = 0$ , или  $h = 0$ , то соответствующая линза является афокальной, а тонкая трехлинзовая система будет равноценна тонкой двухлинзовой системе (§128). Если два из трех  $f, g, h$  параметров одновременно равны нулю, то третий параметр равен 1 и тонкая трехлинзовая система будет равноценна одиночной линзе (§128). Если  $f = 1$ , то  $h = -g$  и величина  $\lambda^{(3)}$  тонкой трехлинзовой системы равноценна внутреннему параметру одиночной линзы; то же самое получается, если или  $g = 1$  или  $h = 1$  (§129).

В §132 предложено при решении Задачи 5 (§125) рассматривать линзы  $PP$  и  $QQ$  как единую тонкую двухлинзовую систему. Такая тонкая двухлинзовая система характеризуется определяющими расстояниями  $a$  и  $\beta$ , внутренними параметрами тонких линз  $\lambda, \lambda'$  и параметром<sup>14</sup>  $f_2$ , который рассчитывается по формуле (63). Протяжение рассеяния тонкой трехлинзовой системы рассчитывается по формуле (68) при

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)} g_2^3 + \lambda''(1 - g_2)^3 - \nu g_2(1 - g_2) \quad (73)$$

где<sup>15</sup>

$$g_2 = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) / \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (74)$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda f_2^3 + \lambda'(1 - f_2)^3 - \nu f_2(1 - f_2), \quad (75)$$

[ср. с формулой(62)],  $\lambda''$  – внутренний параметр тонкой линзы  $RR$ .

Задача 6 сформулирована в §133

Если даны определяющие расстояния  $AE = a$  (рис. 8) и  $cH = \gamma$ , определить такую тонкую трехлинзовую систему, которая создает наименьшее протяжение рассеяния.

Под наименьшим протяжением рассеяния здесь, очевидно, следует понимать локальный (а не глобальный) минимум функции, которая описывает величину протяжения рассеяния. При решении этой задачи первым способом ищется локальный минимум функции

<sup>14</sup>Параметр  $f_2$  в "Dioptricae" обозначается просто как  $f$ , индекс 2 добавлен для отличия от  $f$ , которое введено в §125 и вычисляется по формуле (70).

<sup>15</sup>Параметр  $g_2$  в "Dioptricae" обозначается просто как  $g$ , индекс 2 добавлен для отличия от  $g$ , которое введено в §125 и вычисляется по формуле (71).

$\lambda^{(3)} = \lambda^{(3)}(f, g)$  [см. формулу (69)]. В современных математических обозначениях Задача 5 описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial f} = 0 \text{ и } \frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial g} = 0 \quad (76)$$

Решение Задачи 5

$$f = \frac{\sqrt{3\lambda' + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu}}{\sqrt{3\lambda + \nu} \sqrt{3\lambda' + \nu} + \sqrt{3\lambda + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu} + \sqrt{3\lambda' + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu}} \quad (77)$$

$$g = \frac{\sqrt{3\lambda + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu}}{\sqrt{3\lambda + \nu} \sqrt{3\lambda' + \nu} + \sqrt{3\lambda + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu} + \sqrt{3\lambda' + \nu} \sqrt{3\lambda'' + \nu}} \quad (78)$$

При подстановке в формулу (69) выражений (77), (78) и  $h = 1 - f - g$  получается

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{3 \left( \frac{1}{\sqrt{3\lambda + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\lambda' + \nu}} + \frac{1}{\sqrt{3\lambda'' + \nu}} \right)^2} - \frac{1}{3} \nu \quad (79)$$

Вычисленное по формуле (79) значение будет наименьшим из всех возможных в том случае, когда внутренние параметры тонких линз  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  являются наименьшими из возможных (§135), т. е.  $\lambda = 1$ ,  $\lambda' = 1$ ,  $\lambda'' = 1$ . При подстановке этих значений в формулы (77), (78), (79) получим  $f = 1/3$ ,  $g = 1/3$  и  $\lambda^{(3)} = (3 - 8\nu)/27 = 0.042165$ . Если, как обычно  $\nu = 0.232692$ , то  $\lambda^{(3)} = 0.042165$ . Полученная величина много меньше, чем у тонкой двухлинзовой системы. По найденным значениям  $f$ ,  $g$ ,  $h$  в §136 рассчитываются определяющие расстояния  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\beta$ ,  $c$ , а далее находятся радиусы преломляющих поверхностей линз.

В §137 при решении Задачи 5 вторым способом находится локальный минимум функции  $\lambda^{(3)} = \lambda^{(3)}(g_2)$  [см. формулу (73)]. При этом параметр  $f_2$  соответствует локальному минимуму функции  $\lambda^{(2)} = \lambda^{(2)}(f_2)$  [см. формулу (73)]. В современных математических обозначениях такая задача описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial g_2} = 0 \text{ и } \frac{\partial \lambda^{(2)}}{\partial f_2} = 0 \quad (80)$$

Эта система уравнений имеет следующее решение

$$g_2 = \frac{\sqrt{3\lambda'' + \nu}}{\sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} + \sqrt{3\lambda'' + \nu}} \quad (81)$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{3\lambda' + \nu}}{\sqrt{3\lambda + \nu} + \sqrt{3\lambda' + \nu}} \quad (82)$$

Из формул (81), (82), (75), (73) следует, что значение локального минимума  $\lambda^{(3)}$  описывает выражение (79).

В §142 показано, что при подстановке в формулы (81), (82), (75), (73)  $\lambda = \lambda' = \lambda''$ , получается  $\lambda^{(2)} = (3\lambda - 3\nu)/12$ ,  $\lambda^{(3)} = (3\lambda - 8\nu)/27$ . Расчет определяющих расстояний и радиусов и кривизны линз для этого случая рассмотрен в §143.

В §144 подводятся итоги решения Задачи 6 (см. §133). Так как решение получено на основе принципа наименьшего, то малые ошибки не вызывают существенного ухудшения конструкции. При этом для тонкой трехлинзовой системы локальный минимум протяжения рассеяния примерно в 5 раз меньше, чем локальный минимум протяжения рассеяния тонкой двухлинзовой системы.

В §145 сформулирована следующая задача

Для данных определяющих расстояний  $a$  и  $\gamma$  определить те тонкие трехлинзовые системы, для которых величина  $\lambda^{(3)}$  равна нулю.

Из формулы (73) следует, что условие  $\lambda^{(3)} = 0$  эквивалентно

$$\lambda'' = \frac{\lambda^{(2)}g_2^3 + \nu g_2(g_2 - 1)}{(g_2 - 1)^3}, \quad (83)$$

где  $\lambda'' > 1$ . Пусть вместо  $g_2$ , которое является корнем уравнения (83), по ошибке взято  $g_2 + \omega$ , тогда

$$\lambda^{(3)} = \frac{\omega(\nu - (3\lambda^{(2)} + \nu))}{g_2 - 1}. \quad (84)$$

Чтобы  $\lambda^{(3)}$  при этом было наименьшим, следует принять

$$g_2 = 1 + \sqrt{\frac{3\lambda^{(2)}}{3\lambda^{(2)} + \nu}}. \quad (85)$$

Тогда

$$\lambda^{(3)} = -2\omega \left( \sqrt{3\lambda^{(2)}} + \sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} \right) \sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} \quad (86)$$

Следовательно, чем меньше будет теперь величина самого  $\lambda^{(2)}$ , тем меньше влияние ошибок. В §145 рекомендуется использовать локальный минимум величины  $\lambda^{(2)}$ , т.е.  $\lambda^{(2)} = (1 - \nu)/4$ . В этом случае  $f_2 = 1/2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda' = 1$ ,  $\lambda'' = 2.60372$ ,  $g_2 = 1.84384$ , а определяющие расстояния линз равны (§146): для линзы  $PP$ :  $a$  и  $\frac{2a\gamma}{g_2a - (2 - g_2)\gamma}$ ; для линзы  $QQ$ :  $\frac{-2a\gamma}{g_2a - (2 - g_2)\gamma}$  и  $\frac{a\gamma}{g_2a - (1 - g_2)\gamma}$ ; для линзы  $RR$ :  $\frac{-a\gamma}{g_2a - (1 - g_2)\gamma}$  и  $\gamma$ .

Второе решение Задачи 6 можно найти, если рассматривать тонкую трехлинзовую систему как оптическую систему, которая состоит из одиночной линзы  $PP$  и тонкой двухлинзовой системы, которая состоит из линз  $QQ$  и  $RR$  (§147). При этом последовательность внутренних параметров линз будет перевернутой относительно первого решения Задачи 6:  $\lambda = 1$ ,  $\lambda' = 1$ ,  $\lambda'' = 2.60372$ . Определяющие расстояния линз в данном случае равны (§148): для линзы  $PP$ :  $a$  и  $\frac{+a\gamma}{(1 - g_2)a - g_2\gamma}$ ; для линзы  $QQ$ :  $\frac{-2a\gamma}{(1 - g_2)a - g_2\gamma}$  и  $\frac{+2a\gamma}{(2 - g_2)a - g_2\gamma}$ ; для линзы  $RR$ :  $\frac{-2a\gamma}{(2 - g_2)a - g_2\gamma}$  и  $\gamma$ , где, как и раньше,  $g_2 = 1.84384$ .

Среди всех тонких трехлинзовых систем, у которых  $\lambda^{(3)} = 0$ , две описанные в §§145-148 тонкие трехлинзовые системы обладают тем преимуществом, что небольшие ошибки в конструкции мало влияют на протяжение рассеяния (§149). Если  $g_2 = 1.84384 + \omega$ , то из формулы (86) при  $\lambda^{(2)} = (1 - \nu)/4$  и  $\nu = 0.232692$ , получается  $\lambda^{(3)} = -2.981\omega$ . Поэтому при  $g_2$  немного больше 1.84384 получается  $\lambda^{(3)} < 0$ . А если  $g_2$  немножко меньше 1.84384, то  $\lambda^{(3)} > 0$  и тонкая трехлинзовая система по своим характеристикам приблизится к тонкой двухлинзовой системе (§150, §151).

После §151 следует Дополнение II. В Дополнении II рассматриваются тонкие трехлинзовые системы, в которых показатели преломления линз не равны друг другу. В таблице 3 приведены параметры каждой из трех линз. По этим параметрам в Дополнении II рассчитываются радиусы преломляющих поверхностей линз и протяжение рассеяния тонкой трехлинзовой системы. Выражение для расчета протяжение рассеяния имеет вид

$$\begin{aligned} \mu\gamma^2x^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right) \left\{ \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \right)^2 (\mu\lambda f^3 + \mu'\lambda'g^3 + \mu''\lambda''h^3) + \frac{\nu\mu f}{a} \left( \frac{f-1}{a} + \frac{f}{\gamma} \right) + \right. \\ \left. + \nu'\mu'g \left( \frac{1-f}{a} - \frac{f}{\gamma} \right) \left( \frac{1-h}{\gamma} - \frac{h}{a} \right) \frac{\nu''\mu''h}{\gamma} \left( \frac{h}{a} + \frac{h-1}{\gamma} \right) \right\} \quad (87) \end{aligned}$$

Таблица 3: Обозначения конструктивных параметров тонкой трехлинзовой системы, в которой показатели преломления линз не равны друг другу

линза	Определяющие расстояния	Показатели преломления и зависящие от них величины	внутренний параметр тонкой линзы
I.	$a$ и $\alpha$	$n, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau.$	$\lambda$
II.	$b$ и $\beta$	$n', \mu', \nu', \rho', \sigma', \tau'.$	$\lambda'$
III.	$c$ и $\gamma$	$n'', \mu'', \nu'', \rho'', \sigma'', \tau''.$	$\lambda''$

Дополнение II содержит также пять пунктов замечаний (эти пункты обозначены цифрами I,II,III,IV,V), которые относятся к тонкой трехлинзовой системе с неодинаковыми показателями преломления линз. В пункте I говорится

Различные преломляющие среды обычно применяются только с той целью, чтобы не только протяжение рассеяния, здесь определенное, свести к нулю, но сверх того чтобы устранить неправильность, происходящую из-за различной преломляемости лучей, что, конечно, не может соблюдаться для линз одной и той же рефракции. Далее мы увидим, что для выполнения этого условия требуется, чтобы было  $\zeta f + \eta g + \vartheta h = 0$ , при том что  $\zeta = \frac{dn}{n-1}$ ,  $\eta = \frac{dn'}{n'-1}$  и  $\vartheta = \frac{dn''}{n''-1}$ ; по этим формам уже очевидно, что если бы эти дифференциалы  $dn$ ,  $dn'$  и  $dn''$  были пропорциональны  $n-1$ ,  $n'-1$  и  $n''-1$ , как установил Ньютон, тогда получилось бы  $\zeta = \eta = \vartheta$  или  $f + g + h = 0$ , но мы уже видели, что должно быть  $f + g + h = 1$ ; поэтому, если бы мнение Ньютона было верно, тогда даже при применении различных преломлений нельзя было бы найти средство против рассеяния, происходящего от различной преломляемости. Следовательно этого столь большого вреда можно будет избежать в той мере, в какой  $\zeta$ ,  $\eta$  и  $\vartheta$  являются различными, так чтобы одновременно могло быть и  $f + g + h = 1$ , и  $\zeta f + \eta g + \vartheta h = 0$ , из чего очевидно, что одна или даже две из величин  $f$ ,  $g$  и  $h$  должны быть отрицательными, и таким образом, когда добавлено это условие, тот главный случай, в котором все три величины  $f$ ,  $g$  и  $h$  берутся положительными, здесь не может иметь места.

В приведенной цитате под "неправильностью, происходящей из-за различной преломляемости лучей" следует понимать хроматические aberrации;  $dn$  – величина изменения показателя преломления первой линзы в пределах рабочего спектрального диапазона;  $dn'$  и  $dn''$  равны аналогичным величинам для второй и третьей линз. Так как  $f$ ,  $g$ ,  $h$  являются приведенными оптическими силами линз, то фраза "одна или даже две из величин  $f$ ,  $g$  и  $h$  должны быть отрицательными" означает, что оптическая сила одной или двух линз должна быть отрицательной.

В пункте II утверждается, что из условия равенства нулю протяжения рассеяния [см. формулу(87)] можно найти или  $\lambda$  или  $\lambda'$  или  $\lambda''$ . При этом необходимо учесть, что любая из этих величин не может быть меньше единицы, а большие значения  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  нежелательны из технологических соображений. Одну из величин  $f$ ,  $g$ ,  $h$  можно выбрать произвольно, а оставшиеся две величины определяются из условий  $f + g + h = 1$  и  $\zeta f + \eta g + \vartheta h = 0$ .

В пункте III приведены формулы для расчета радиусов линз при  $a = \infty$ , что характерно для объективов телескопов.

В пункте IV указано, что достаточно только двух сортов стекла для исправления протяжения рассеяния и хроматизма. В этом же пункте рассматривается случай, когда третья и первая линза делаются из одного и того же сорта стекла.

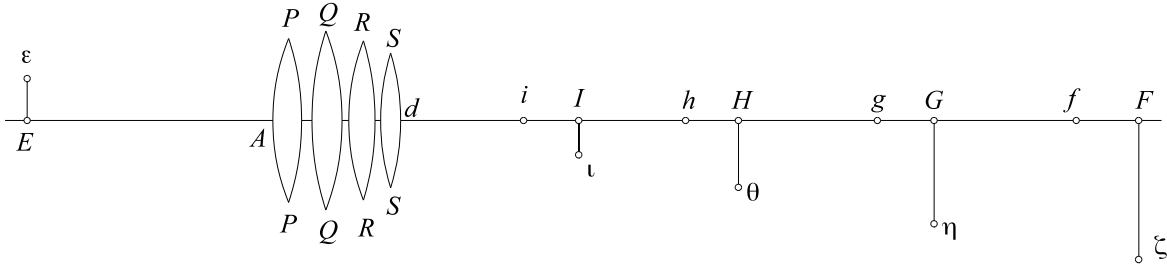


Рис. 9: Тонкая четырехлинзовая оптическая система. Рисунок из [3]

В пункте V рассматривается оптическая система в которой между двумя стеклянными линзами из одного и того же сорта стекла находится жидкость. Данную оптическую систему можно рассматривать как тонкую трехлинзовую, если радиус передней поверхности для средней линзы равен и противоположен радиусу задней поверхности передней линзы, и радиус задней поверхности равен и противоположен радиусу первой поверхности третьей линзы. В этом же пункте показано, что жидкостная линза должна быть выпуклой, стеклянные линзы или обе или по крайней мере одна должны быть вогнутыми. Конструкция подобного рода оптической системы описана в "Началах..." Ньютона [33]. Более подробно тот же вопрос разобран Ньютоном в "Оптике..." [18, книга I, предл. VII (русский перевод, стр.86)].

После Дополнения II следует §152, где формулируется и решается Задача 8 об определении параметров тонкой четырехлинзовой системы из условия получения локального минимума протяжения рассеяния при заданных положениях предмета и изображения.

В показанной на рис. 9 тонкой четырехлинзовой системе предмет  $E\varepsilon$ , находится от первой линзы  $PP$  на расстоянии  $AE = a$ ; для первой линзы определяющие дистанции равны  $a$  и  $\alpha$ , для второй линзы  $QQ$  определяющие дистанции равны  $b = -\alpha$  и  $\beta$ , для третьей линзы  $RR$  определяющие дистанции равны  $c = -\beta$  и  $\gamma$ , для четвертой линзы  $SS$  определяющие дистанции равны  $d = -\gamma$  и  $dI = \delta$ . Толщины линз считаются бесконечно малыми. Внутренние параметры тонких линз  $PP, QQ, RR, SS$  равны  $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$  соответственно. Полу диаметры отверстия всех линзы равны  $x$ .

Протяжение рассеяния тонкой четырехлинзовой систем описывается выражением

$$Ii = \mu\delta^2x^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\delta} \right) \left( \lambda^{(4)} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\delta} \right)^2 + \frac{\nu}{a\delta} \right), \quad (88)$$

где

$$\lambda^{(4)} = \lambda^{(3)}h^3 + \lambda'''(1-h)^3 - \nu h(1-h) \quad (89)$$

$$h = \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{a} \right) / \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{a} \right) \quad (90)$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda^{(2)}g^3 + \lambda''(1-g)^3 - \nu g(1-g) \quad (91)$$

$$g = \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{a} \right) / \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{a} \right) \quad (92)$$

$$\lambda^{(2)} = \lambda f^3 + \lambda'(1-f)^3 - \nu f(1-f) \quad (93)$$

$$f = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a} \right) / \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{a} \right) \quad (94)$$



По современной терминологии  $(1/\alpha + 1/a)$  является оптической силой линзы  $PP$ ;  $(1/\beta + 1/a)$  является оптической силой системы линз  $PP$  и  $QQ$ ;  $(1/\gamma + 1/a)$  является оптической силой системы линз  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ ;  $(1/\delta + 1/a)$  является оптической силой тонкой четырехлинзовой системы. Тогда  $f$  – приведенная оптическая сила линзы  $PP$  в двухлинзовой системе, которую образуют линзы  $PP$  и  $QQ$ ;  $g$  – приведенная оптическая сила двухлинзовой системы, которую образуют линзы  $PP$  и  $QQ$ , в трехлинзовой системе, которую образуют линзы  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ ;  $h$  – приведенная оптическая сила трехлинзовой системы, которую образуют линзы  $PP$ ,  $QQ$  и  $RR$ , в тонкой четырехлинзовой системе.

Метод, который используется в "Dioptricae" для решения Задачи 8, аналогичен второму методу решения Задачи 6. Если воспользоваться современными обозначениями, то локальный минимум функции (89) находится в результате последовательного решения следующих задач

Из условия  $\frac{\partial \lambda^{(2)}}{\partial f} = 0$  находится  $f$  и по формуле (93) рассчитывается значение  $\lambda^{(2)}$ ,

Из условия  $\frac{\partial \lambda^{(3)}}{\partial g} = 0$  находится  $g$  и по формуле (91) рассчитывается значение  $\lambda^{(3)}$ ,

Из условия  $\frac{\partial \lambda^{(4)}}{\partial h} = 0$  находится  $h$  и по формуле (89) рассчитывается значение  $\lambda^{(4)}$ .

В "Dioptricae" получено следующее решения Задачи 8

$$f = \frac{\sqrt{3\lambda' + \nu}}{\sqrt{3\lambda + \nu} + \sqrt{3\lambda' + \nu}} \quad (95)$$

$$g = \frac{\sqrt{3\lambda'' + \nu}}{\sqrt{3\lambda^{(2)} + \nu} + \sqrt{3\lambda'' + \nu}} \quad (96)$$

$$h = \frac{\sqrt{3\lambda''' + \nu}}{\sqrt{3\lambda^{(3)} + \nu} + \sqrt{3\lambda''' + \nu}} \quad (97)$$

По найденным значениям  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\lambda^{(2)}$ ,  $\lambda^{(3)}$ ,  $\lambda^{(4)}$  рассчитываются  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Если  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda'''$ , то, как показано в §153,

$$\lambda^{(2)} = \frac{3\lambda - 1 \cdot 3\nu}{3 \cdot 4} \quad (98)$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{3\lambda - 2 \cdot 4\nu}{3 \cdot 9} \quad (99)$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{3\lambda - 3 \cdot 5\nu}{3 \cdot 16} \quad (100)$$

и  $f = 1/2$ ,  $g = 2/3$ ,  $h = 3/4$ . Формулы для расчета радиусов преломляющих поверхностей линз при  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda'''$  приведены в §154 (рис. 10).

В §155 рассмотрен случай, когда  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 1$ . В этом случае формулы (98), (99), (100) принимают вид (рис. 10)

$$\lambda^{(2)} = \frac{3 - 1 \cdot 3\nu}{3 \cdot 4} \quad (101)$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{3 - 2 \cdot 4\nu}{3 \cdot 9} \quad (102)$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{3 - 3 \cdot 5\nu}{3 \cdot 16} \quad (103)$$

Если, как обычно  $\nu = 0.232692$ , то  $\lambda^{(4)} = -0.010216$ . В §156 отмечено, что при  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 5\nu$ , формула (100) переходит в тождество  $\lambda^{(4)} = 0$ .

В §157 сравниваются два рассмотренных выше случая: когда  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 1$  или когда  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 5\nu$ . Хотя значения  $\lambda^{(4)}$  отличаются примерно на одну

## Coroll. 2.

154. Hinc ex §. 91 sequens quatuor lentium simplicium constructio obtinetur:

Pro lente radius faciei

$$\begin{aligned} \text{Prima PP} & \left\{ \begin{array}{l} \text{anterioris} = \frac{+a\delta}{(+\rho-3\sigma)\delta + \sigma a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \frac{+a\delta}{(+\sigma-3\rho)\delta + \rho a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{array} \right. \\ \text{Secunda QQ} & \left\{ \begin{array}{l} \text{anterioris} = \frac{+a\delta}{(+\rho-2\sigma)\delta + (+\sigma-\rho)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \frac{+a\delta}{(+\sigma-2\rho)\delta + (-\rho-\sigma)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{array} \right. \\ \text{Tertia RR} & \left\{ \begin{array}{l} \text{anterioris} = \frac{+a\delta}{(+\rho-\sigma)\delta + (+\sigma-2\rho)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \frac{+a\delta}{(+\sigma-\rho)\delta + (+\rho-2\sigma)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{array} \right. \\ \text{Quarta SS} & \left\{ \begin{array}{l} \text{anterioris} = \frac{+a\delta}{\sigma\delta + (+\sigma-3\rho)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \\ \text{posterioris} = \frac{+a\delta}{\sigma\delta + (+\rho-3\sigma)a \pm \tau(a+\delta)\sqrt{(\lambda-1)}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

## Coroll. 3.

155. Si praeterea numeri  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$  unitati aequales statuuntur, qui est valor minimus, quem recipere possunt erit: ob  $v=0$ , 232692

$$\lambda^{(1)} = \frac{3-2v}{3+v} = 0,191827$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{3-8v}{3+v} = 0,042165$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{3-15v}{3+v} = 0,010216$$

sicque pro lente quadruplicata valor numeri  $\lambda^{(1)}$  adeo infra nihilum deprimatur.

Coroll.

Рис. 10: Страница 132 из "Dioptricae". На этой странице в §154 приведены формулы для расчета радиусов преломляющих поверхностей линз при  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda'''$ , а в §155 рассмотрен случай, когда  $\lambda = \lambda' = \lambda'' = \lambda''' = 1$ .

сотою, однако различия в форме линз будут существенно превышать ошибки, которые могут быть допущены не слишком грубым ремесленником. Из этого в §157 делается вывод о том, что если в конструкции таких тонких четырехлинзовых систем мастером допускаются небольшие ошибки, то эти ошибки будут мало влиять на протяжении рассеяния или на величину самого  $\lambda^{(4)}$ .

В "Dioptricae" не приводится формула, которая выражает протяжение рассеяния через  $\lambda^{(j)}$  при произвольном числе линз  $j$  в тонкой оптической системе. Но такую зависимость можно получить методом математической индукции из формул (29), (66), (68), (88). В последующих главах "Dioptricae" часто удобно использовать тонкие линзовые системы, в которых величина  $\lambda^{(j)}$  не только равна нулю, но даже немного менее нуля. В этих случаях можно с успехом воспользоваться четырехлинзовыми системами. А если понадобятся тонкие оптические системы, для которых величина самого  $\lambda^{(j)}$  равна или немного больше 0.042165, то в §157 рекомендуется использовать тонкие трехлинзовые системы (см. §136); подобно тому как рекомендуются двухлинзовые системы, если нет потребности в величине  $\lambda^{(j)}$  меньше 0.191827.

В §158, который завершает главу III, указано, что задачи об определении параметров тонких пятилинзовой, шестиллинзовой, семиллинзовой и т.д. систем из условия получения локального минимума протяжения рассеяния можно решить по аналогии с Задачей 8. Система, которая рассчитана на локальный минимум протяжения рассеяния, обладает тем преимуществом, что незначительные ошибки изготовления слабо влияют на предполагаемый результат. В §158 особо отмечено, что так как едва ли когда-либо на практике потребовались тонкие линзовые системы, для которых величина числа  $\lambda^{(j)}$  была существенно меньше нуля, было бы излишне дальше рассматривать тонкие линзовые системы из пяти и более линз. Но Эйлер считает все-таки полезным для тонких линзовых систем, которые рассчитаны на локальный минимум протяжения рассеяния, дать выражения для величин  $\lambda^{(5)}$ ,  $\lambda^{(6)}$  и т.д., где  $\lambda^{(j)}$  соответствует тонкой линзовой системе из  $j$  линз. При этом все внутренние параметры тонких линз  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$ ,  $\lambda'''$ ,  $\lambda''''$ ,  $\lambda'''''$  и т.д., принимаются равными 1.

В "Dioptricae" не приводится формула для расчета  $\lambda^{(j)}$  при произвольном числе линз  $j$ . Но такую формулу можно получить на основании выражений (101)–(103) методом математической индукции:

$$\lambda^{(j)} = \frac{3 - (j^2 - 1)\nu}{3 \cdot j^2} \quad (104)$$

Вместо этого приводятся отдельные формулы для  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$ , ...,  $\lambda^{(9)}$ ,  $\lambda^{(10)}$  и численные значения этих величин при  $\nu = 0.232692$  (см. таблицу 4). В §158 отмечено, что при увеличении числа линз в такого рода тонких системах соответствующее число  $\lambda^{(\infty)}$  будет равно  $-\nu/3 = -0.077564$ . Из этого в §158 еще раз делается вывод о том, что

едва ли когда-либо может существовать случай, при котором потребуется хотя бы тонкая пятилинзовая система.

## 5 Заключение

Основной темой первых двух глав "Dioptricae" является анализ свойств оптических систем в параксиальном приближении, а также исследования продольной сферической аберрации третьего порядка оптических систем. Основной структурной единицей при таком исследовании является одиночная линза. Первая глава практически полностью посвящена исследованию свойств одиночной линзы. Бесконечно тонкая линза в "Dioptricae" рассматривается как предельный случай линзы конечной толщины. Вторая глава "Dioptricae" посвящена анализу многолинзовых оптических систем. Этот анализ основан на результатах решения задачи о суммировании продольной сферической аберрации третьего порядка (§68).

Таблица 4: Численные значения параметров  $\lambda^{(j)}$

Число линз $j$	$\lambda^{(j)}$
1	$(3 - 0\nu)/(3 \cdot 1) = 1.000000$
2	$(3 - 3\nu)/(3 \cdot 4) = 0.191827$
3	$(3 - 8\nu)/(3 \cdot 9) = 0.042165$
4	$(3 - 15\nu)/(3 \cdot 16) = -0.010216$
5	$(3 - 24\nu)/(3 \cdot 25) = -0.034461$
6	$(3 - 35\nu)/(3 \cdot 36) = -0.047632$
7	$(3 - 48\nu)/(3 \cdot 49) = -0.055573$
8	$(3 - 63\nu)/(3 \cdot 64) = -0.060727$
9	$(3 - 80\nu)/(3 \cdot 81) = -0.064261$
10	$(3 - 99\nu)/(3 \cdot 100) = -0.066788$

Если в первой и второй главах "Dioptricae" в основном решались задачи по определению характеристик оптической системы при известных конструктивных параметрах, то в третьей главе рассматривается обратная задача (т. е. задача синтеза) – определение конструктивных параметров тонких двух-, трех- и четырехлинзовых систем, которые удовлетворяют заданным оптическим характеристикам<sup>16</sup>.

Хотя анализ и синтез оптических систем в области аббераций третьего порядка дает только приближенные результаты, но объем вычислений в этом случае существенно меньше, чем при использовании для расчета лучей точных формул. Подобное сокращение объема вычислений очень важно, когда нет возможности использовать для расчетов электронно-вычислительные машины<sup>17</sup>. Кроме того, теория аббераций третьего порядка позволяет конструкцию оптических систем лучше понять зависимости между абберациями и конструктивными параметрами оптической системы [24, 21, 34, 22].

Некоторые приемы и подходы к синтезу и анализу оптических систем в области аббераций третьего порядка, которые встречаются в первых трех главах "Dioptricae", аналогичны тем, которые встречаются в современных руководствах по абберационному расчету оптических систем:

- в формулах для расчета аббераций третьего порядка радиусы кривизны преломляющих поверхностей выражаются через параметры траектории параксиального луча
- разделение при синтезе оптической системы параметров на внешние (определяющие расстояния) и внутренние ( $k$ ,  $\lambda$ )
- представление оптической системы в виде набора отдельных компонентов, каждый из которых состоит из одной или нескольких тонких линз
- использование формул для суммирования аббераций третьего порядка отдельных линз и компонентов оптической системы

<sup>16</sup>Некоторые задачи синтеза оптической системы решаются в первой главе "Dioptricae": например, определение такой формы тонкой линзы, при которой протяжение рассеяния минимально (§46), или при которой получается заданное протяжение рассеяния (§55)

<sup>17</sup>Еще в 60-х годах XX века для расчетов параксиальных характеристик и аббераций оптических систем рекомендовалось использовать пяти-, а в некоторых случаях и семирядные таблицы логарифмов [24]

- использование приведенных оптических сил линз и тонких компонентов

Сферическая aberrация третьего порядка одиночной линзы рассмотрена в "Dioptricae" на уровне руководств и справочников по aberrационному расчету оптических систем второй половины XX – начала XXI века. Но при этом следует помнить, что в руководствах и справочниках второй половины XX – начала XXI века кроме сферической aberrации рассматриваются и другие aberrации третьего порядка. "Dioptricae" и другие труды Эйлера по расчету оптических систем подвергались очень суровой критике за то, что в этих работах не рассматриваются монохроматические aberrации точек, которые не лежат на оптической оси [15]. Однако еще в 1817 году К. Ф. Гаусс в своей статье [10] не рассматривает при расчете двухлинзового объектива монохроматические aberrации точек, которые не лежат на оптической оси. Возможно, это связано с тем, что стремление повысить увеличение зрительных труб (прежде всего астрономических) приводит к уменьшению углового поля. При малом угловом поле на качество изображения наиболее сильно влияют сферическая aberrация, хроматизм положения и сферохроматизм. Хотя в §11 Эйлер утверждает, что изучение изображения точки, которая не лежит на оптической оси бесполезно из-за громоздкости получаемых формул, но параллельно работам Эйлера публиковались труды Клеро [35] и Даламбера [36], где исследовалась кома третьего порядка и условия ее устранения в линзовых объективах. А в практически законченном виде теория aberrаций третьего порядка для внеосевых точек предмета была создана только в середине XIX века [37, 38, 39].

Следует отметить, что в "Dioptricae" используется более строгий метод вывода формулы (51) суммирования продольной сферической aberrации, чем в большинстве современных курсов прикладной геометрической оптики [22, 21].

В третьей главе "Dioptricae" при решении задач синтеза тонких оптических систем Эйлер особое внимание обращает на обеспечение устойчивости сферической aberrации (протяжения рассеяния) оптических систем к малым отклонениям конструктивных параметров от их номинальных значений. Такая устойчивость была особенно важна при том уровне технологии изготовления оптических деталей и приборов, который был достигнут к 70-м годам XVIII века. Хотя ремесленники умели выдерживать сферическую форму преломляющих поверхностей, однако получить сферические поверхности с заданным радиусом кривизны было трудно. Эйлер об этой проблеме написал следующее [2, письмо 216]:

он [мастер] должен будет придать металлическим чашам ту кривизну, какой требуют расчеты, и это еще не все, потому что, пока обрабатывают линзу металлической чашей, чтобы придать ей нужную форму, сама чаша деформируется; поэтому приходится время от времени подправлять форму самой чаши и притом с большой точностью; если же все эти предосторожности не соблюдаются, нельзя рассчитывать на успех. Кроме того, очень сложно добиться того, чтобы линза не приняла форму, несколько отличающуюся от формы металлической чаши.

Кроме этого, точность измерения показателей преломления стекол до открытия в конце XVIII– начале XIX вв. спектральных линий была очень низкой [15, 40].

С особенностями технологии изготовления оптических деталей в XVIII в. может быть связано то, что в первых трех главах "Dioptricae" не рассматриваются системы из склеенных линз. Только в Дополнении III рассматривается некоторое подобие системы из трех склеенных линз – оптическая система из двух линз, пространство между которыми заполнено жидкостью.

Метод, который предлагается в третьей главе "Dioptricae" для обеспечения устойчивости величины протяжения рассеяния к малым изменениям конструктивных параметров оптической системы, предполагает выполнения условия локального минимума протяжения рассеяния для оптической системы в целом и для входящих в оптическую систему линз и компонентов. Следует указать, что и сегодня рекомендуется рассчитывать оптиче-

ские системы таким образом, чтобы значения aberrаций третьего порядка отдельных линз и компонентов имели, по возможности, малые значения [24, 22]. Это связано с тем, что большие значения aberrаций третьего порядка отдельных компонентов оптической системы приводят к возникновению aberrаций пятого и более высокого порядков, кроме того оптическая система становится чувствительной к малым отклонениям от конструктивных параметров, в том числе к нарушениям осевой симметрии.

Но рекомендация рассчитывать оптические системы таким образом, чтобы значения aberrаций третьего порядка отдельных линз и компонентов имели, по возможности, малые значения, не может быть сколько-нибудь обязательной. Так, например, в "Dioptricae" показано, что условие исправления хроматизма положения в тонких двух- и трехлинзовых системах (см. Дополнения I и II) несовместимо с условием обеспечения локального минимума протяжения рассеяния (сферической aberrации) для каждой отдельной линзы и/или компонента. Тем более приходится нарушать условие локального минимума сферической aberrации линз и/или компонентов при создании современных оптических систем, где требуется исправление aberrаций для значительного относительного отверстия и широкого поля.

Тем не менее в современных руководствах и справочниках по прикладной геометрической оптике рассматривается расчет оптической системы из тонких соприкасающихся линз, каждая из которых рассчитана на минимум сферической aberrации третьего порядка. Такого рода системы являются основой для расчета конденсоров осветительных систем и некоторых других оптических устройств. Так как конденсор непосредственно не участвует в формировании изображения, то нет настоящей необходимости в коррекции aberrаций конденсора. Однако при наличии у конденсора большой сферической aberrации может возникнуть неравномерность освещенности, зависящая от структуры источника света. Другое нежелательное следствие большой сферической aberrации заключается в срезании крайних лучей пучков диафрагмами и оправами линз объектива, который непосредственно формирует изображение [34]. Для коррекции сферической aberrации конденсора можно, например, использовать оптическую систему с отрицательными линзами или асферическими поверхностями. Но это приводит к существенному удорожанию конденсора. Поэтому очень часто оптимальным решением является конденсор из нескольких положительных линз, каждая из которых рассчитана на минимум сферической aberrации.

Так как задача расчета оптической системы из тонких соприкасающихся линз, каждая из которых рассчитана на минимум сферической aberrации третьего порядка, рассмотрена в третьей главе "Dioptricae" то автор данной статьи считает, что такая задача должна носить название "задача Эйлера".

Хотя современная система математических обозначений весьма многим обязана Эйлеру [41], но систему обозначений, которая используется в "Dioptricae", трудно назвать совершенной. Например, в первых трех главах "Dioptricae" символом  $f$  обозначены: точка крайнего изображения, радиус передней поверхности линзы, приведенная оптическая сила линзы в тонких линзовых системах и их компонентах. В таблице 1 определяющие расстояния линз обозначаются буквами латинского ( $a, b, c, d, \dots$ ) и греческого ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ ) алфавитов, а толщины этих линз обозначены как  $v, v', v'', v''', \dots$ . Так как толщина одиночной линзы ранее (до §72) обозначалась как  $d$ , то Эйлеру приходится пояснять (§72), что

Толщину линз здесь буквой  $v$  я обозначаю, потому что буква  $d$  встречается среди определяющих расстояний, если число линз превышает три.

Подобная система обозначений приводит к существенному увеличению объема "Dioptricae". Например, вместо короткой ссылки на формулы (27)–(27) в §154 в явном виде приводятся выражения для расчета радиусов линз четырехлинзовой системы (рис. 10). Вполне возможно, что систематическое использование общепринятых в настоящее время нижних и/или

верхних индексов могло сделать систему обозначений "Dioptricae" более удобной. Интересно, что пример использования верхних индексов в "Dioptricae" есть:  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}, \dots$ . Но вместо одной короткой формулы (104), приводятся в §158 в явном виде формулы для расчета  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(10)}$  (см. таблицу 4).

Можно предположить, что Эйлер хотел сделать "Dioptricae" более понятной для ремесленников и поэтому сознательно избегал сложной и новой (для XVIII века) системы обозначений с использованием верхних и нижних индексов. В связи с этим интересно отметить, что в течение всего XVIII в. продолжалось внедрение в обиход и изучение столь привычных в начале XXI века десятичных дробей [42]. Так как десятичные дроби употреблялись главным образом при теоретических исследованиях и астрономических вычислениях, то в элементарных руководствах им отводилось очень скромное место. Даже в "Универсальной арифметике" Эйлера [43] десятичные дроби вводятся мимоходом при описании логарифмических таблиц, правила действий над ними не сформулированы, а в небольшой главе "О бесконечных десятичных дробях" приведено лишь несколько примеров обращения обыкновенных дробей в десятичные [42]. Поэтому не удивительно, что величина показателя преломления стекла записывается в "Dioptricae" в виде обычной дроби  $31/20$ , а не в виде десятичной дроби 1.55. В настоящей статье численные значения величин приведены в той же форме и с тем же числом десятичных знаков, как и в оригинальном издании [3].

## Благодарность

Автор благодарит Н. А. Алмазову за оказанную помощь в переводе с латинского на русский язык "Dioptricae".

## Список литературы

- [1] Вавилов С И *Собрание сочинений т. 3*, (М.: Изд-во АН СССР, 1956) сс. 138–147
- [2] Эйлер Л *Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях*(СПб.: Наука,2002) [Euler L *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie T. 1-3* (SPb.: Acad. Sci., 1768–1772)]
- [3] Euler L *Dioptrica pars prima, continens librum primum, de explicatione principiorum, ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda* (SPb.: Acad. Sci., 1769)
- [4] Euler L *Dioptrica pars secunda, continens librum secundum, de constructione telescopiorum dioptricomum cum appendice de constructione telescopiorum catoptrico-dioptricarum* (SPb.: Acad. Sci., 1770)
- [5] Euler L *Dioptrica pars tertia, continens librum tertium, de constructione microscopiorum tam simplicium quam compositorum* (SPb.: Acad. Sci., 1771)
- [6] Тиле Р *Леонард Эйлер. Перевод с немецкого доктора физико-математических наук, профессора Н.И.Кованцова* (Киев: Вища школа, 1983) [Thiele R *Leonhard EULER* (Leipzig: BSB V. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1982)]
- [7] Фус Н, в сб. *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука* (Под ред. Н Н Боголюбова, Г К Михайлова, А П Юшкевича) (М.: Наука, 1988) с. 353–382. [Fuss N *Éloge de monsieur Léonard Euler, lu à l'Académie imp. des sciences, dans son Assemblée du 23 oct. 1783 ...* ( St. Pétersbourg: Acad. Sci., 1783)]
- [8] Klügel G S *Analytische Dioptrik in zwey Theilen: Der erste enthält die allgemeine Theorie der optischen Werkzeuge: der zweyte die besondere Theorie und vortheilhafteste Einrichtung*

- aller Gattungen von Fernröhren, Spiegelteleskopen, und Mikroskopen* (Leipzig: J. F. Junius, 1778)
- [9] Schaefer C, in *Carl Friedrich Gauss Werke. Band 11* (Berlin: Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1924-1929) S. 1-217
- [10] Gauss C *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger IV* 345–351 (1817)
- [11] Mach E *Die Prinzipien der physikalischen Optik Historisch und erkenntnispsychologisch Entwickelt* (Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1921)
- [12] Habicht W, in *Leonhard Euler 1707-1783: Beiträge zu Leben und Werk* (Basel: Birkhäuser Verlag, 1983) S. 283–302
- [13] Гуриков В А *Возникновение и развитие ахроматических оптических систем. Учебное пособие для студентов* (М.: МИИГАиК, 2000)
- [14] Гуриков В А *Становление прикладной оптики. XV-XIX века.* (М.: Наука, 1983)
- [15] Слюсарев Г Г, в сб. Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. = Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Akademie der Wissenschaften der UdSSR vorgelegten Abhandlungen (М.: Изд-во АН СССР, 1958) сс. 414–420.
- [16] Декарт Р. *Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, Метеоры, Геометрия. Редакция, перевод, статьи и комментарии Г. Г. Слюсарева и А. П. Юшкевича* (М.: Издательство Академии Наук СССР, 1953) [Descartes R Discours de la Méthode Pour, Essais. Dioptrique. Météores. Geometrie. (Leyde: De l’Imprimerie de Ian Maire, 1637)]
- [17] Rashed R *Geometry and Dioptrics In Classical Islam* (London: Published by Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2005)
- [18] Ньютон И *Оптика или трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света. Перевод с 3-го англ. издания 1721 г. с примечаниями С. И. Вавилова.* (Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954) [Newton I Opticks: or, A treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light(London: William and John Innys, 1721)]
- [19] Miniati M et al. *Applied Optics*, 41(4):644 –647, 2002.
- [20] Слюсарев Г Г *Геометрическая оптика* (М.-Л.: Издательство АН СССР, 1946)
- [21] Турыгин И А *Прикладная оптика. Фотографические, проекционные и фотоэлектрические системы. Методы абберрационного расчета оптических систем* (М.: Изд-во Машиностроение, 1966)
- [22] Заказнов Н П, Кирюшин С И, Кузичев В И *Теория оптических систем* (М.: Машиностроение, 1992)
- [23] Ньютон И *Лекции по оптике. Перевод, комментарии и редакция С. И. Вавилова* (М.-Л.: Изд. АН СССР, 1946) [Newton I *Lectioes Opticae* (Londini: Apud Guil. Innys, 1729)]
- [24] Слюсарев Г Г *Методы расчета оптических систем* (Л.: Машиностроение, 1969)
- [25] Герцбергер М *Современная геометрическая оптика* (М.: Издательство иностранной литературы, 1962) [Herzberger M *Modern geometrical optics* (New York–London: Interscience Publishers, 1958)]
- [26] Schröder G, Treiber H *Technische Optik: Grundlagen und Anwendungen* (Würzburg: Vogel, 2002)



- [27] Чуриловский В Н *Теория оптических приборов* (М.–Л.: Машиностроение, 1966)
- [28] Halley E *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **17** 960–969 (1693)
- [29] Родионов С А *Автоматизация проектирования оптических систем.* (Л.: Машиностроение, 1982)
- [30] Hopkins Н Н *Optica Acta* **62** 667–714 (1981)
- [31] Kidger M J *Fundamental Optical Design* ( SPIE Press, 2002)
- [32] Gauss C, in *Carl Friedrich Gauss Werke. Band V* (Berlin: Königlichen Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen , 1867) 243–276
- [33] Ньютон И *Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. с прим. и поясн. А.Н. Крылова* (М.: Наука, 1989) [Newton I *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Glasgow: James Maclehose, publisher to the university, 1871)]
- [34] Чуриловский В Н *Теория хроматизма и aberrаций третьего порядка* (Ленинград: Машиностроение, 1968)
- [35] Clairaut A C *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France, Classe des sciences mathématiques et physiques* 578 (1764)
- [36] Alembert J L R *Opuscules mathématiques ou Mémoires sur différens sujets de géométrie, de mécanique, ... T. 3* (Paris: Chez Briasson, 1764)
- [37] Seidel L *Astronomische Nachrichten* **43** (1027) 289–304 (1856)
- [38] Seidel L *Astronomische Nachrichten* **43** (1028) 305–320 (1856)
- [39] Seidel L *Astronomische Nachrichten* **43** (1029) 321–332 (1856)
- [40] Шпольский Э В *Успехи физических наук* **LXIX**(4) 657–678 (1959)
- [41] Cajori F A *History of Mathematical Notations, Notations Mainly in Higher Mathematics, volume II* (Chicago: The Open Court Publishing Company, 1952)
- [42] Юшкевич А П и др. *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия Т. 3*, (М.: Наука, 1972)
- [43] Эйлер Л *Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным. Том 1, содержащий в себе все образы алгебраического вычисления.* (СПб.: Имп. АН, 1768) [Euler L *Vollständige Anleitung zur Algebra. Erster Theil von der verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen* (St. Petersburg: Keiserlichen Akademie der Wissenschaften, 1771)]